

## Линейная алгебра

Векторное пространство. Линейная комбинация и оболочка. Зависимость и независимость векторов.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

## Векторное пространство (Vector space)

### Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов  $V$ . Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.
- Сложение. Любым двум элементам из множества  $V$  ставится в соответствие третий:

$$\forall x, y \in V : \quad x \oplus y = w, w \in V.$$

- Умножение на скаляр. Любой паре элементов из  $V$  и  $\mathbb{R}$  ставится в соответствие элемент из  $V$ :

$$\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \alpha \otimes x = w, w \in V.$$

## Векторное пространство

### Примеры векторных пространств

Coordinate space. Множество последовательностей длины  $n$ , частным случаем которых являются геометрические векторы.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

## Векторное пространство

### Примеры векторных пространств

- Множество матриц  $n \times m$ .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

## Векторное пространство

### Примеры векторных пространств

- Множество матриц  $n \times m$ .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Множество полиномов (Что? Да!) фиксированной максимальной степени.

$$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$f(x) + g(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha f(x) = (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1)$$

## Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.
- Предположим, мы вытащили набор векторов  $v_1, \dots, v_m$  из  $\mathbb{V}$ , и набор скаляров  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  из  $\mathbb{R}$ .
- Линейная комбинация группы векторов - новый вектор, построенный в виде:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \quad x \in \mathbb{V}.$$

- Из-за замкнутости  $\mathbb{V}$  относительно двух введенных операций получившийся элемент  $x$  тоже содержится в векторном пространстве  $\mathbb{V}$ .

## Примеры линейных комбинаций

Пример:  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\textcolor{red}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textcolor{blue}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация:

$$2\textcolor{red}{A} + 3\textcolor{blue}{B} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример:  $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x, 2]$

$$\textcolor{red}{p}_1(x) = 1.5x^2 - x, \quad \textcolor{blue}{p}_2(x) = x + 1, \quad \textcolor{green}{p}_3(x) = 2$$

Линейная комбинация:

$$\begin{aligned} 2\textcolor{red}{p}_1 + (-2)\textcolor{blue}{p}_2 + 5\textcolor{green}{p}_3 &= \\ 2(1.5x^2 - x) - 2(x + 1) + 5(2) &= \\ 3x^2 - 4x + 8 \end{aligned}$$

## Линейная оболочка

Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов  $v_1, \dots, v_m$ , назовем линейной оболочкой этого набора и обозначим:

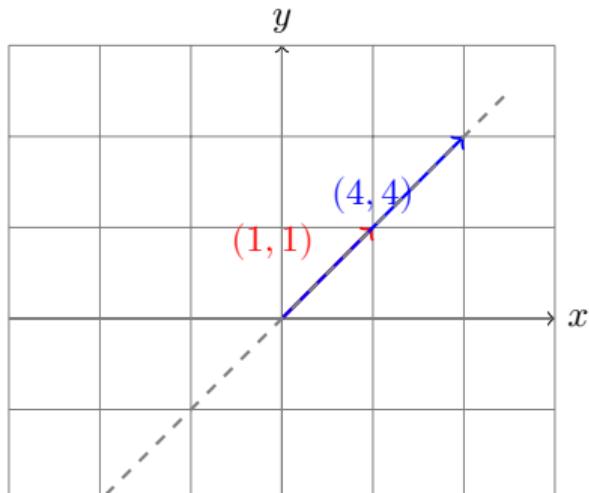
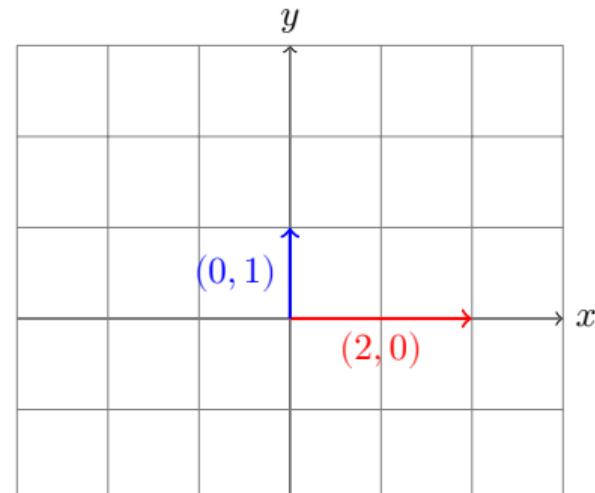
$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

$$\textcolor{red}{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \textcolor{blue}{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}(\textcolor{red}{a}, \textcolor{blue}{b}) = \{\alpha_1 \textcolor{red}{a} + \alpha_2 \textcolor{blue}{b} : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

$$\textcolor{red}{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \textcolor{blue}{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}(\textcolor{red}{c}, \textcolor{blue}{d}) = \{\alpha_1 \textcolor{red}{c} + \alpha_2 \textcolor{blue}{d} : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \text{линия}$$



## Зависимость и независимость векторов

### Мотивация

- Рассмотрим набор векторов  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , заранее извлеченных из  $\mathbb{V}$ , и произвольный набор скаляров  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  из  $\mathbb{R}$ . В результате построения линейной комбинации получим некий элемент  $x \in \mathbb{V}$ :

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

## Зависимость и независимость векторов

### Мотивация

- Рассмотрим набор векторов  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , заранее извлеченных из  $\mathbb{V}$ , и произвольный набор скаляров  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  из  $\mathbb{R}$ . В результате построения линейной комбинации получим некий элемент  $x \in \mathbb{V}$ :

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

- Уникален ли такой набор  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  или, может, существует другой набор  $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n\}$  такой, что:

$$x = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \dots + \tilde{\alpha}_m v_m.$$

## Зависимость и независимость векторов

### Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$\begin{aligned}(x - x) = \mathbf{0} &= (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m\end{aligned}$$

## Зависимость и независимость векторов

### Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$\begin{aligned}(x - x) = \mathbf{0} &= (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m\end{aligned}$$

- Задача уникальности представления  $x$  теперь изменилась к задаче “как получить элемент 0” в результате линейной комбинации.

## Зависимость и независимость векторов

### Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$\begin{aligned}(x - x) = \mathbf{0} &= (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m\end{aligned}$$

- Задача уникальности представления  $x$  теперь изменилась к задаче “как получить элемент 0” в результате линейной комбинации.
- Если единственный возможный вариант получить  $\mathbf{0}$  это положить все  $\gamma_i = 0$ :

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

Что будет означать, что представление  $x$  уникально.

## Зависимость и независимость векторов

### Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$\begin{aligned}(x - x) = \mathbf{0} &= (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m\end{aligned}$$

- Задача уникальности представления  $x$  теперь изменилась к задаче “как получить элемент 0” в результате линейной комбинации.
- Если единственный возможный вариант получить  $\mathbf{0}$  это положить все  $\gamma_i = 0$ :

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

Что будет означать, что представление  $x$  уникально.

- Если есть какой-то другой способ получить  $\mathbf{0}$ , т.е. хотя бы один  $\gamma_k \neq 0$ , значит  $(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) \neq 0 \rightarrow \alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k$ .  
Что означает, что представление  $x$  не уникально - существует другой набор коэффициентов.

## Линейная независимость

### Определение

Мы назовем набор векторов линейно независимым, если единственная возможность получить элемент  $\mathbf{0}$  как результат линейной комбинации:

$$\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_m v_m = \mathbf{0},$$

это положить все скаляры равными 0,  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$ . (Также называется тривиальной комбинацией).

## Линейная зависимость

### Определение

С другой стороны, мы назовем набор векторов линейно зависимым, если **существует** нетривиальная комбинация коэффициентов  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ , (не равные 0 одновременно), такая что:

$$\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_m v_m = \mathbf{0}.$$