Линейная алгебра
Системы линейных уравнений

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

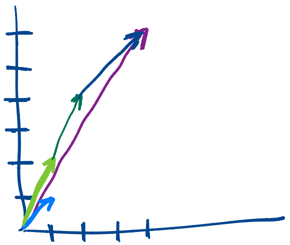
СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за $a_1, \dots, a_m$ то тогда:

$$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r. Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов $a_1, \dots, a_m$ вообще можно было бы "дотянуться" до вектора r. Иными словами, получаем:



$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}4\\6\end{matrix} \end{array}\right)_{-2R_1} \qquad x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} x_1 = 4 - x_2 = 2 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \qquad x = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

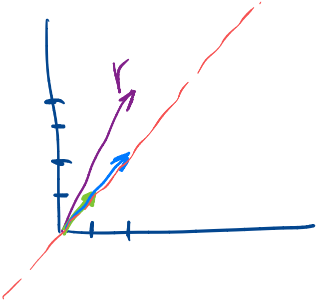
СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за $a_1, \dots, a_m$ то тогда:

$$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r. Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов $a_1, \dots, a_m$ вообще можно было бы "дотянуться" до вектора r. Иными словами, получаем:



$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{-R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 2$$

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за $a_1, \dots, a_m$ то тогда:

$$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

  Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r. Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов $a_1, \dots, a_m$ вообще можно было бы "дотянуться" до вектора r. Иными словами, получаем:

-

> **Существование решения**
>
> Для того, чтобы у СЛУ $A\mathbf{x} = r$ существовало хотя бы одно решение, необходимо, чтобы выполнялось:
>
> $$r \in \text{ span } (a_1, \dots, a_m)$$
>
> Иначе, СЛУ называется несовместной (inconsistent). В ступенчатом виде матрицы несовместность системы выражается в виде наличия строчки:
>
> $$[0\ 0\ \dots\ 0 \mid b],\ b \neq 0 \qquad 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_m = b \neq 0$$

Пример: несовместность vs неуникальное решение

$x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 7$

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{2} & 4 & 10 & 0 \\ \cancel{1} & -2 & -3 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & \cancel{-2} & -4 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$ inconsistent.
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 12 & 23 & 14 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -5R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & \cancel{2} & 8 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \text{Free} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

$x_1 = 2 - 3x_3 - 2x_2 = 2 - 3x_3 - 2(2 - 4x_3)$

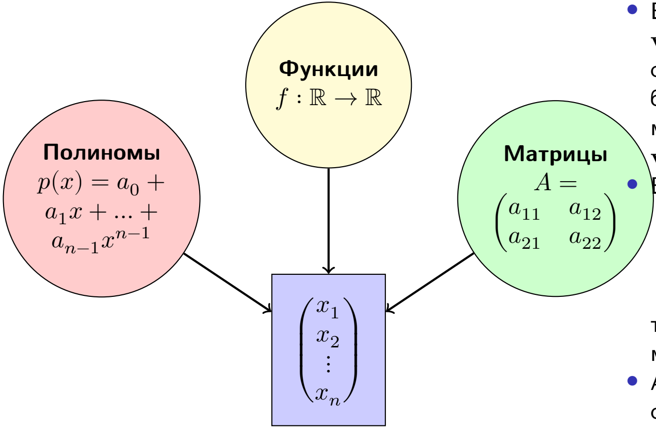
$x_2 = 2 - 4x_3$

x_3 – Free

$$\longrightarrow x = \begin{cases} x_1 = -2 + 5x_3 \\ x_2 = 2 - 4x_3 \\ x_3 \text{ – Free} \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

Reminder: в чем сила?



Линейная алгебра: единый язык для разных объектов

- Если векторное пространство $\mathbb{V}$ имеет базис $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор $\mathbf{v}$ однозначно определяется своими координатами α_k в этом базисе. Если мы упакуем α_k в вектор из $\mathbb{R}^n$, то можем оперировать им вместо оперирования над $\mathbf{v}$.
- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k$, то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{v}_k$$

  т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.
- Аналогично, чтобы получить $\alpha \mathbf{v}$, можно умножить столбец координат $\mathbf{v}$ на α и сразу получить координаты вектора $\alpha \mathbf{v}$.

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- В интерпретации линейной комбинации столбцов такие уравнения внезапно напоминают нам про возможность получения нулевого вектора:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \leftrightarrow x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m = \mathbf{0},$$

Если единственное решение - тривиальный вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то набор перед нами линейно независимая группа векторов в столбцах матрицы. Иначе - линейно зависимая.

Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Тогда

1. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ совпадает с $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ является базисом в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

Примеры

$$Ax=0$$

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

ЛНЗ система

1. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -R_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$x_1 = 0 - 2x_2 = 0$

$x_2 = 0$

$X = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ЛЗ система

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}\right\}$

Free

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -R_1\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$x_1 = -4x_3 - 2x_2 = -8x_3$

$-x_2 = 0 - 2x_3$

$x_2 = 2x_3$

$X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-8\\2\\1\end{pmatrix}$

$\forall x_3 \in \mathbb{R}$

inconsistent.

Примеры

$$Ax=0 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0x_1 + x_2 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 4 - 2x_2 = 2$$

$$x_2 = 1 \quad \rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

Примеры

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & -7 & -6 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +3R_1 \\ -5R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 8 & 14 & -6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +2R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
  1. $1-3t+5t^2, -3+5t-7t^2, -4+5t-6t^2, 1-t^2$
  2. $5t+t^2, 1-8t-2t^2, -3+4t+2t^2, 2-3t$

$\mathbb{R}[x,2]$, $S=\{1, t, t^2\}$

1. $[v_1]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $[v_2]_S = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $[v_3]_S = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $[v_4]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Слайд для записей