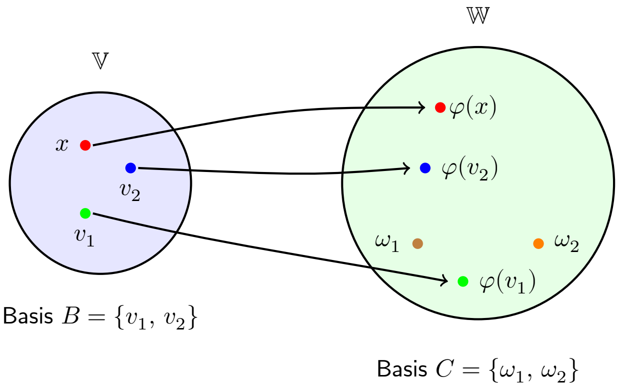
Линейные отображения и векторные пространства

Действующие лица

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,\ [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2,\ [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

- В результате получаем разложение $\varphi(x)$ по базису в пространстве $\mathbb{W}$: $\varphi(x) = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2$, где:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{L_{\varphi,(B,C)}\,[x]_B}$$

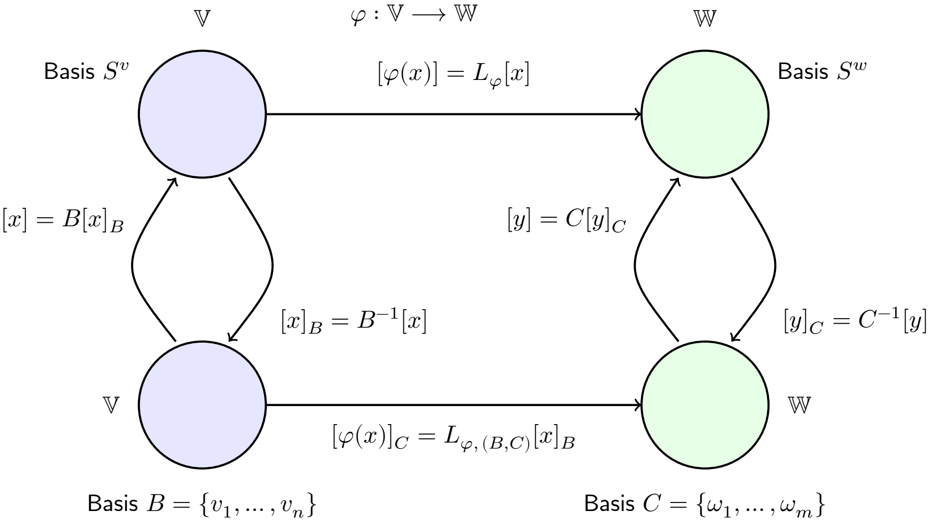
Устройство матрицы линейного отображения

- Если обобщать наш игрушечный пример, то

$$L_{\varphi,(B,C)} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}, \; L_{\varphi,(B,C)} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

  где $[\varphi(v_i)]_C$ — это координаты образа базисного вектора v_i в базисе C.
- Базис $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ действует в области определения (пространстве аргументов) функции $\mathbb{V}$, базис $C = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ действует в пространстве значений функции $\mathbb{W}$.

Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств



Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$\boxed{[x] = P_{B\to S^v}[x]_B = B[x]_B}, \quad \boxed{[y] = P_{C\to S^w}[y]_C = C[y]_C}$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$:

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1}L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi,(B,C)}[x]_B$$

- Финально, формула для изменения матрицы линейного отображения при одновременном изменении пары базисов из стандартного:

W ◯ target

$P_{C\to S} = C$

$$L_{\varphi,(B,C)} = C^{-1}L_\varphi B$$

OV Domain

$P_{B\to S} = B$

1. Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, $\mathbb{V} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^3$, и представлено как:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу A_φ, которая реализует φ в паре стандартных базисов. Покажите, что это работает на конкретном векторе, то есть сравните результаты подсчета через аналитическую формулу и матрично-векторное умножение.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}$$

Basis set:

$S^V = \{s_1^V, s_2^V, s_3^V\}$

Basis set:

$S^W = \{s_1^W, s_2^W, s_3^W\}$

$$A_\varphi = \left([\varphi(s_1^V)] \,\middle|\, [\varphi(s_2^V)] \,\middle|\, [\varphi(s_3^V)] \right)$$

$$1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s_1^V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_1^V) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_1^V)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s_2^V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_2^V) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_2^V)] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_3^V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_3^V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_3^V)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{[X]} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{[\varphi(X)]}$$

2. Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, $\mathbb{V} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^2$, и представлено:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Найдите матрицу A_φ, которая реализует φ в паре стандартных базисов,

(b) Пусть сначала мы совершаем переход в базис $\mathcal{B}$ в domain пространстве $\mathbb{V}$. Найдите новый вид матрицы линейного отображения $A_{\varphi,(\mathcal{B},\mathcal{S}^w)}$, которая соответствует φ, если $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Пусть мы далее совершаем переход в базис $\mathcal{C}$ в target пространстве $\mathbb{W}$. Найдите новый вид матрицы линейного отображения $A_{\varphi,(\mathcal{B},\mathcal{C})}$, которая соответствует φ, если $\mathcal{C} = \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверяйте себя на каждом шаге: возьмите конкретный вектор и сравните результаты подсчета через аналитическую формулу и матрично-векторное умножение.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}$$

a.

$$A_\varphi = \left(\boxed{[\varphi(s_1^v)]} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(s_2^v)]} \right)$$

$$s_1^v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_1^v) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_1^v)] = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$s_2^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_2^v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s^v)] = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

check:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \end{pmatrix}$$

b

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

Basis set

$$B = \{b_1, b_2\} \qquad S^w = \{s_1^w, s_2^w\}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

1 опция

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = \left(\boxed{[\varphi(b_1)]_{S^w}} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(b_2)]_{S^w}} \right)$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_1)] = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_2)] = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ ✓

2 опция: Коррекция матрицы.

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = A_\varphi \cdot P_{B\to S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Check:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad x = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to [x]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[x]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix}}_{[\varphi(x)]} \checkmark$$

C. $\quad V \xrightarrow{\varphi} W$

Basis set

$B=\{b_1, b_2\}$ $\qquad$ $C=\{c_1, c_2\}$, $\quad c_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \; c_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

1 опция

$$A_{\varphi,(B,C)}=\left(\boxed{[\varphi(b_1)]_C} \;\middle|\; \boxed{[\varphi(b_2)]_C}\right)$$

$$b_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_1)]=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

$$b_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_2)]=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$$

$$P_{C\to S}[a]_C=[a], \quad P_{C\to S}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} \qquad P^{-1}_{C\to S}P_{C\to S}[a_C]=P^{-1}_{C\to S}[a]$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&4\\1&2&-1\end{array}\right)_{-R_1}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&4\\0&1&-5\end{array}\right)\to \begin{array}{l}t_2=-5\\t_1=9\end{array} \qquad [\varphi(b_1)]_C=\boxed{\begin{pmatrix}9\\-5\end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&5\\1&2&-3\end{array}\right)_{-R_1}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&5\\0&1&-8\end{array}\right)\to \begin{array}{l}t_2=-8\\t_1=13\end{array} \qquad [\varphi(b_2)]_C=\boxed{\begin{pmatrix}13\\-8\end{pmatrix}}$$

$$A_{\varphi,(B,C)}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}9\\-5\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}13\\-8\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

2 опция: Коррекция матрицы.

$$A_{\varphi,(B,C)} = (P_{C\to S})^{-1} A_\varphi \cdot P_{B\to S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \checkmark$$

Check:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(X) = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad X = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{C\to S}[a]_C = [a]$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & -5 \end{array}\right)_{-R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -18 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} t_2 = -18 \\ t_1 = 31 \end{array} \to [\varphi(X)]_C = \begin{pmatrix} 31 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}}_{A_{\varphi,(B,C)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[X]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 31 \\ -18 \end{pmatrix}}_{[\varphi(X)]_C}$$

$$C \cdot A_{\varphi,(B,C)} = \cancel{C} \cdot \cancel{C^{-1}}^{\,I} \cdot \underbrace{\boxed{A_\varphi \cdot B}}_{A_{\varphi,(B,S^w)}}$$

$$C \cdot A_{\varphi,(B,C)} = A_{\varphi,(B,S^w)}$$

$$A_{\varphi,(B,C)}\, B^{-1} = \underbrace{C^{-1} \cdot A_\varphi}_{A_{\varphi,(S,C)}} \cdot \cancel{B\, B^{-1}}^{\,I}$$

$$A_{\varphi,(B,C)} \cdot B^{-1} = A_{\varphi,(S,C)}$$

3. Построить матрицу A_φ, соответствующую линейному отображению $\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в паре стандартных базисов. Известно, как функция φ действует на пару векторов: вектор $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ переходит в вектор $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ и вектор $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ переходит в вектор $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hint: пользуйтесь свойствами линейных отображений! Аргументы можно комбинировать, можно умножать на скаляры.

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

$$A_\varphi = \left(\boxed{[\varphi(s_1^V)]} \;\middle|\; \boxed{[\varphi(s_2^V)]} \right)$$

$$\boxed{\varphi(\alpha x) = \alpha \cdot \varphi(x) \ ; \ \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)}$$

$$b \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s_1^V \ ; \ \varphi(-1 \cdot b) = -1 \cdot \varphi(b) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(a) + \frac{1}{2}\varphi(b) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(s_1^V)] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad [\varphi(s_2^V)] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Check: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & -2x_2 \\ -x_1 & +x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \\ X\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

4. Докажите в общем виде, что следующее отображение $\varphi: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ является линейным:

$$\varphi(X) = X^\top, \quad \forall X \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Что? Транспонирование матрицы? Да, это тоже линейное отображение.

Найдите матрицу, соответствующую этому отображению в паре стандартных базисов:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Затем проверьте, что это работает на любой 2×2 матрице по вашему выбору.

1. Let $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$

$$\varphi(X+Y) = \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{21}+y_{21} \\ x_{12}+y_{12} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} = \varphi(X) + \varphi(Y) \quad \checkmark$$

$$\varphi(\alpha X) = \begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{21} \\ \alpha x_{12} & \alpha x_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \varphi(X) \quad \checkmark$$

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [\varphi(S_1^v)] & [\varphi(S_2^v)] & [\varphi(S_3^v)] & [\varphi(S_4^v)] \end{array} \right)$$

$$\varphi(S_1^v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(S_1^v)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(S_2^v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(S_2^v)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(S_3^v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(S_3^v)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(S_4^v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(S_4^v)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Check:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi(X) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[X] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad [\varphi(X)] = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

✓

5. Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x,2]$ и $\mathbb{W} = \mathbb{R}[x,1]$ — два векторных пространства; пусть $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ — линейное отображение.

$$\varphi\left(bx^2 + cx + d\right) = 2bx + c, \quad \forall (bx^2 + cx + d) \in \mathbb{R}[x,2].$$

(a) Найдите матрицу A_φ, которая реализует φ в паре стандартных базисов $\mathcal{S}^v = \{1, x, x^2\}$ и $\mathcal{S}^w = \{1, x\}$,

(b) Затем мы совершаем переход в базис $\mathcal{B} = \left(x^2, x, -1 - x - x^2\right)$ в domain пространстве $\mathbb{V}$. Найдите новый вид матрицы линейного отображения $A_{\varphi,(\mathcal{B},\mathcal{S}^w)}$, которая соответствует φ. Покажите, как это работает на каком-то конкретном элементе пространства $\mathbb{V}$.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}$$

Basis set:

$S^V = \{S_1^V, S_2^V, S_3^V\}$

Basis set:

$S^W = \{S_1^W, S_2^W\}$

$$A_\varphi = \left(\boxed{[\varphi(S_1^V)]} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(S_2^V)]} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(S_3^V)]} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$S^W = \{1, X\}$

$S_1^V = 1$, $\varphi(S_1^V) = 0$, $[\varphi(S_1^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$S_2^V = X$, $\varphi(S_2^V) = 1$, $[\varphi(S_2^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$S_3^V = X^2$, $\varphi(S_3^V) = 2X$, $[\varphi(S_3^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$$2X = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X$$

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

$\mathcal{B} = (x^2, x, -1 - x - x^2)$

Basis set

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} \qquad S^w = \{\overset{1}{S_1^w}, \overset{X}{S_2^w}\}$$

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = \left(\boxed{[\varphi(b_1)]_{S^w}} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(b_2)]_{S^w}} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(b_3)]_{S^w}} \right)$$

$$\varphi(b_1) = 2X, \quad [\varphi(b_1)] = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad 0 \cdot 1 + 2 \cdot X$$

$$\varphi(b_2) = 1 \qquad [\varphi(b_2)] = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(b_3) = -1 - 2X, \quad [\varphi(b_3)] = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Check: $F = 7X^2 - 3X + 2 \; ; \; \varphi(F) = 14X - 3$

$$F = 5X^2 + (-5)X + (-2)(-1 - X - X^2) = \qquad [F]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 - 3X + 7X^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}}_{[F]_B} = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix} = [\varphi(F)] \checkmark$$

$$A_{\varphi,(B,S^{\omega})} = A_{\varphi} \cdot P_{B \to S}$$

$$P_{B \to S} = \left[[b_1] \,\middle|\, [b_2] \,\middle|\, [b_3] \right]$$

$$\mathcal{B} = (x^2, x, -1 - x - x^2)$$

$$S = (1, X, X^2)$$

$$[b_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [b_3] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[b_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A_{\varphi,(B,S^{\omega})}$$