Линейная алгебра

Замена базиса как линейное отображение. Построение матрицы линейного отображения.

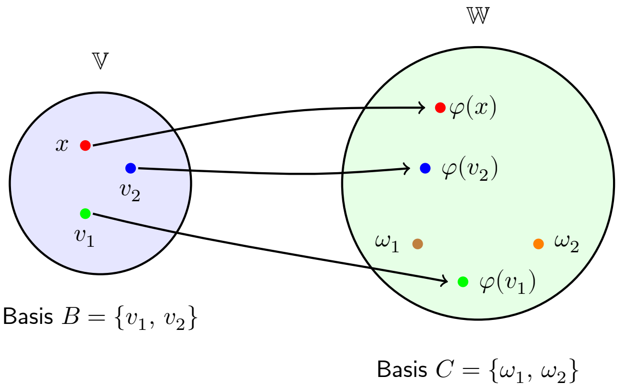
Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отоюражения и векторные пространства

Минимальная визуализация

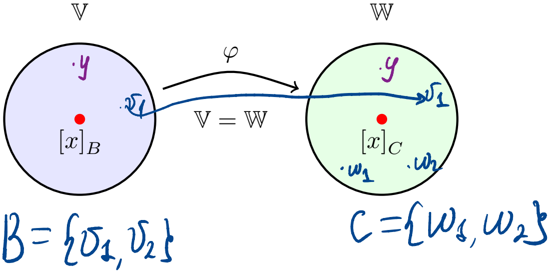
$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Замена базиса сквозь призму линейного отображения

- Давайте рассмотрим самое глупенькое отображение, которое не делает ничего, кроме как находит копию элемента (identity transformation):

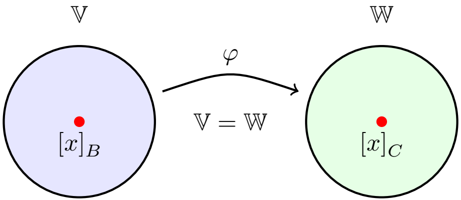
$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}, \ \mathbb{W} = \mathbb{V},$$
$$\text{such that } \forall x \in \mathbb{V}\ \varphi(x) = x \in \mathbb{W}$$



Замена базиса сквозь призму линейного отображения

- Давайте рассмотрим самое глупенькое отображение, которое не делает ничего, кроме как находит копию элемента (identity transformation):

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}, \ \mathbb{W} = \mathbb{V},$$
$$\text{such that } \forall x \in \mathbb{V}\ \varphi(x) = x \in \mathbb{W}$$



- Но никто не запрещает использовать разные базисы в разных пространствах. Пусть в пространстве $\mathbb{V}$ у нас действует базис $B = \{v_1, v_2\}$, а в пространстве $\mathbb{W}$ действует базис $C = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

x

$\|$

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2,$$
$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2).$$

Помните, что $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ — это векторы, т.е. абстрактные элементы векторного пространства W.

$\|$ $\|$

v_1 v_2

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

Давайте посмотрим на элементы $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ в базисе C:

$$\varphi(v_1) = v_1 = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,$$
$$\varphi(v_2) = v_2 = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2$$

$[v_1]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$

$[v_2]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Теперь вернемся к $\varphi(x) = x_1\varphi(v_1) + x_2\varphi(v_2) \iff x = x_1 v_1 + x_2 v_2$.

$$\varphi(x) = x = x_1(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2) + x_2(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2) =$$
$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\omega_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\omega_2 =$$
$$\gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2$$

$, \ [x]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

- Мы получили разложение элемента $\varphi(x) = x$ по базису пространства $\mathbb{W}$. Можем записать координаты как:

$$[\varphi(x)]_C = [x]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на вектор... снова...

Наконец:

$$\left([v_1]_C \,\middle|\, [v_2]_C \right)$$

$$[x]_C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{B \to C} \, [x]_B \, .$$

Матрица замены координат

Матрица для identity transformation помогает нам связать координаты одного и того же элемента x в двух разных базисах. Эту формулу также называют формулой замены координат.

$$[\varphi(x)]_C = A_\varphi \, [x]_B$$

Примеры

① $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad B = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}} \right\}$$

$$X = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \quad [x]_S = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad [x]_B = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$B \to S$$

$$[x]_S = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{B\to S}\,[x]_B\,.$$

$$[v_1]_S \quad [v_2]_S$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$[v_1]_S = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad [v_2]_S = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$[X]_S$

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \leftarrow [x]_B$$

Слайд для записей

2

$$W = \mathbb{R}[x,1] \xrightarrow{Id} W = \mathbb{R}[x,1], \qquad F(x) \mapsto F(x)$$

$$B = \{\underset{v_1}{2}, \underset{v_2}{1+x}\} \qquad S = \{1, X\}$$

$$[F(x)]_S = A_{B\to S}[F(x)]_B$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{B\to S} = \left[[v_1]_S \,\middle|\, [v_2]_S \right]$$

$$2 = 2\cdot 1 + 0\cdot X \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1+X = 1\cdot 1 + 1\cdot X$$

$$F(x) = 5X + 7 =$$

$$= 1\cdot 2 + 5\cdot(1+x); \quad [F(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = 7\cdot 1 + 5\cdot X; \quad [F(x)]_S = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$