Линейная алгебра

Построение матрицы линейного отображения. Изменение матрицы при изменении базисов.

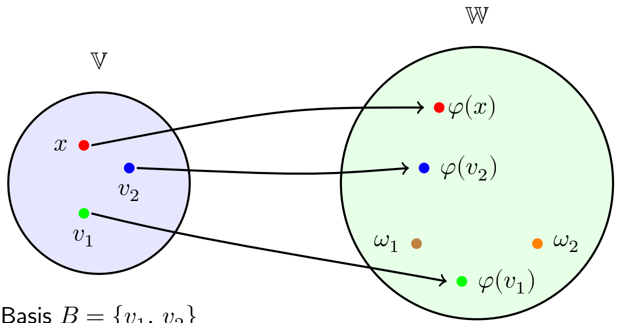
Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отображения и векторные пространства

Действующие лица

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Basis $B = \{v_1, v_2\}$

Basis $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

Напоминание: построение матрицы линейного преобразования

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(\underline{x_1 v_1 + x_2 v_2}) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$

$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot 2 \\ x_2 \cdot 3 \end{pmatrix}$

Напоминание: построение матрицы линейного преобразования

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2, \quad [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2, \quad [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Напоминание: построение матрицы линейного преобразования

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,\ [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2,\ [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

- В результате получаем разложение $\varphi(x)$ по базису в пространстве $\mathbb{W}$: $\varphi(x) = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2$, где:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{L_{\varphi,(B,C)}\,[x]_B}$$

Устройство матрицы линейного преобразования

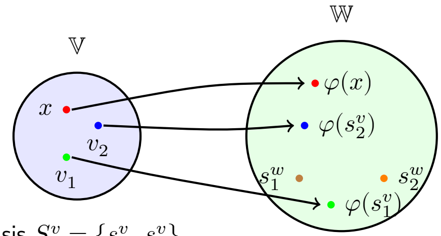
- Если обобщать наш игрушечный пример, то

$$L_{\varphi,\,(B,C)} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где $[\varphi(v_i)]_C$ — это координаты образа базисного вектора v_i в базисе C.

Случай стандартных базисов

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Basis $S^v = \{s_1^v,\ s_2^v\}$

Basis $S^w = \{s_1^w,\ \overset{s}{\cancel{v}}{}_2^w\}$

- В случае стандартных базисов получаем

$$L_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(s_1^v)] & [\varphi(s_2^v)] & \cdots & [\varphi(s_n^v)] \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где $[\varphi(s_i^v)]$ — это координаты образа базисного вектора s_i^v в стандартном базисе S^w в пространстве $\mathbb{W}$.

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$$S_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2\cdot 0 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2\cdot 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$L_\varphi = \left[[\varphi(s_1^v)] \,\middle|\, [\varphi(s_2^v)] \right]$$

$$\left[\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = [\varphi(s_1^v)] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(s_2^v)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \varphi(X) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$L_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(X)] = L_\varphi [X]$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Примеры

②

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$S^v \qquad S^w$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$L = \Big[[\varphi(s_1^v)] \,\Big|\, [\varphi(s_2^v)] \,\Big|\, [\varphi(s_3^v)] \Big]$$

$$\varphi(s_1^v) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = [\varphi(s_1^v)]$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = [\varphi(s_2^v)]$$

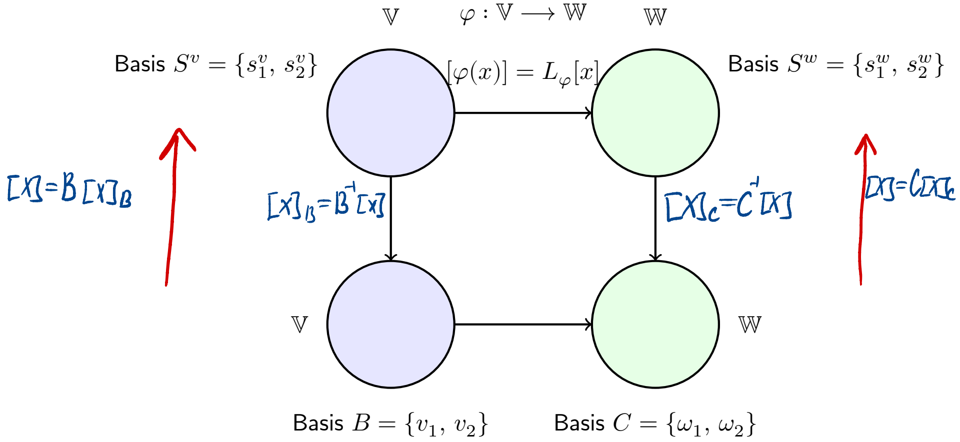
$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [\varphi(s_3^v)]$$

$$L_\varphi[x] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств



$$[\varphi(x)]_C = L_{\varphi,(B,C)}[x]_B$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = \boxed{P_{B \to S^v}}[x]_B = \boxed{B}[x]_B, \quad [a] = \boxed{P_{C \to S^w}}[a]_C = \boxed{C}[a]_C$$

$$[x]_B = B^{-1}[x] \qquad [a]_C = C^{-1}[a]$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [a] = P_{C \to S^w}[a]_C = C[a]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$:

$[\varphi(x)] = C \cdot [\varphi(x)]_C$

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

$[x] = B \cdot [x]_B$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B\to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [a] = P_{C\to S^w}[a]_C = C[a]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$:

$$C^{-1}\; C[\varphi(x)]_C = C^{-1} L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = \boxed{C^{-1}L_\varphi B}[x]_B = L_{\varphi,(B,C)}[x]_B$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [a] = P_{C \to S^w}[a]_C = C[a]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $\boxed{[\varphi(x)] = L_\varphi[x]}$:

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1}L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi,(B,C)}[x]_B$$

- Финально, формула для изменения матрицы линейного преобразования при одновременном изменении пары базисов из стандартного:

$$\boxed{L_{\varphi,(B,C)} = C^{-1}L_\varphi B}$$

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

$$L_{\varphi,(B,S)} = \underbrace{C^{-1}}_{I} L_\varphi \cdot P_{B\to S} = L_\varphi \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad V$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}[X]_B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = [\varphi(X)] \quad V$$

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$L_\varphi \nearrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Слайд для записей