Линейная алгебра
Нормированные пространства

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Пространства со скалярным произведением (Inner product spaces)

Скалярное произведение

Пусть $\mathbb{V}$ — векторное пространство. Скалярное произведение на $\mathbb{V}$ — это **функция**, которая каждой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ сопоставляет скаляр, обозначаемый как $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, так что выполняются свойства 1–4 ниже.

1. Симметричность (сопряжённая): $\boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}),}$
2. Линейность: $\boxed{(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})}$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и любых скаляров α, β,

   $(\alpha x, z) = \alpha (x, z)$
3. Неотрицательность: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}$,
4. Невырожденность: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Скалярное произведение в координатных пространствах

Definition

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ — это число, вычисляемое по формуле:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \quad = \langle u, v \rangle = (u, v)$$

Геометрический смысл:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

$$\|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + \ldots \ u_n^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Обозначения скалярного произведения

Различные способы записи

1. Через транспонирование

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}$$

Матричная форма:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}_{[1 \times n]} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{[n \times 1]} = \underbrace{\square}_{1 \times 1}$$

Результат:

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

2. Через угловые скобки

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$

Альтернативно: - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ — точечное произведение

Обозначения эквивалентны:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u, v)$$

$$u^T v = \sum u_i v_i$$

$$\langle u, v \rangle = \sum u_i v_i$$

Слайд для записей

$x \in \mathbb{R}^n$

$y \in \mathbb{R}^m$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\underset{n\times 1}{t} = \underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times 1}{y}$$

$\langle x, y\rangle = x^T y$ $\cancel{\neq}$ not def.

$\langle x, Ay\rangle = x^T A y$ ✓

$$x^T(Ay) = \boxed{(x^T A)}\, y = r^T y = \langle r, y\rangle$$

$$r = (x^T A)^T = A^T x$$

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^T x, y\rangle$$

$(AB)^T = B^T A^T$

$\langle A, B\,dX\rangle$ $\quad$ $\langle DF, dX\rangle$

$\langle B^T A, dX\rangle$ $\quad$ $DF = B^T A$

Нормированные пространства

$\|\cdot\|_{*} : V \to \mathbb{R}^{+} = [0; +\infty)$

Свойства нормы:

1. Однородность: $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$ для любых $\mathbf{v}$ и скаляров α.
2. Неравенство треугольника: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
3. Неотрицательность: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ для всех векторов $\mathbf{v}$.
4. Невырожденность: $\|\mathbf{v}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве V каждой вектору $\mathbf{v}$ сопоставлено число $\|\mathbf{v}\|$ так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ называется нормой. Векторное пространство V, оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

$V = \mathbb{R}[x, n]$

$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f \cdot g \, dx$

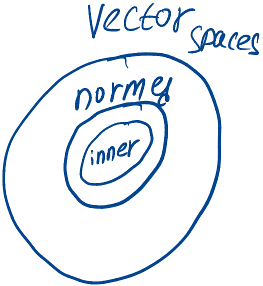
Разные нормированные пространства

$\|X\|_2 = \sqrt[2]{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle X, X \rangle}$

Любое пространство со скалярным произведением является нормированным, поскольку норма $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ удовлетворяет свойствам 1–4. Однако существуют и другие нормы. Например, для $p, 1 \leq p < \infty$, можно определить норму $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{R}^n$ как

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

$\|X\|_1 = (|x_1| + \dots + |x_n|)$



Также можно определить норму $\|\cdot\|_\infty$ (при $p = \infty$) как

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1, 2, \dots, n\}$$

$\|\Delta\|_2 = \|(y - \tilde{y})\|_2$

$\|\Delta\|_\infty < \varepsilon$

Ортогональность. Ортогональные и ортонормированные базисы.

Определение

Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Запись $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ обозначает ортогональность векторов.

Для ортогональных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ верно тождество Пифагора:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2 \quad \text{if } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_2^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \cancelto{0}{(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \cancelto{0}{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \\
&= \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2 \\
&\quad ((\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \text{ because of orthogonality }).
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ортогональные базисы.

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Определение

Система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ называется ортогональной, если любые два вектора взаимно ортогональны, то есть $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0$ при $j \neq k$.
Если дополнительно $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ для всех k, то система называется ортонормированной.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{span} \neq \mathbb{R}^4$$

$$\left\{ \underset{a}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}, \underset{b}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\langle a, b \rangle = 0$$

$$\|a\|_2 = 1$$

$$\|b\|_2 = 1$$

Зачем это нужно?

$P_{B\to S}[X]_B = [X]$

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства с $\mathbf{v}_1$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left\|\mathbf{v}_1\right\|^2$$

Аналогично, беря скалярное произведение обеих частей с $\mathbf{v}_k$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left\|\mathbf{v}_k\right\|^2$$

Итак

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{\left\|\mathbf{v}_k\right\|^2}$$

$\int F v_k \, dx$