Теория вероятностей и математическая статистика

Тестирование статистических гипотез III. Начала линейной регрессии.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Иначе: о разностях вероятностей успеха у двух случайных величин Бернулли

- Предположим, у нас есть случайная выборка $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ из распределения Бернулли с $P(X_i = 1) = p_1$, и случайная выборка $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ из распределения Бернулли с $P(Y_i = 1) = p_2$. Тогда обе случайные выборки - процессы Бернулли длины n и m соответственно.
- Нас интересует разность истинных долей (или, то же самое, разность вероятностей успеха):

$$\theta = p_1 - p_2$$

- Если $n, m > 30$, то по ИТМЛ:

$$\hat{p}_1 \sim \mathcal{N}\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right), \quad \hat{p}_2 \sim \mathcal{N}\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$$

- Введём точечную оценку $\hat{\theta} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$ — разность двух выборочных долей.
- Свойства точечной оценки: $E[\hat{\theta}] = p_1 - p_2$, $Var[\hat{\theta}] = \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}$.
- Так как сумма двух нормальных случайных величин — нормальная случайная величина:

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$$

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Пример 1: левосторонний тест

Фармацевтическая компания тестирует новое лекарство против стандартного лечения. Вопрос: имеет ли новое лекарство более высокую долю выздоровления, чем стандартное лечение?

- Разработка лекарств затратна и требует много времени. Даже небольшие улучшения в доле выздоровления могут спасти жизни и снизить затраты на здравоохранение. Статистическая валидация критически важна перед получением регуляторного одобрения.
- Данные:
  - Стандартное лечение (A): $n = 800$ пациентов, $\tilde{p}_A = 0.65$ (65% доля выздоровления)
  - Новое лекарство (B): $m = 400$ пациентов, $\tilde{p}_B = 0.72$ (72% доля выздоровления)
- Гипотезы:
  - $H_0 : p_A = p_B$ (новое лекарство не более эффективно)
  - $H_1 : p_A < p_B$ (новое лекарство имеет более высокую долю выздоровления)

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Односторонний тест

- Идея: мы можем ввести новую случайную величину $D = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$
- Её параметры: $E[D] = p_1 - p_2$, $Var[D] = \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}$
- Если $p_1 = p_2$, то $E[D] = 0$, если $p_1 < p_2$, то $E[D] < 0$
- Таким образом, задача сравнения p_1 с p_2 сводится к тестированию математического ожидания одной случайной величины D:

$$H_0 : \ E[D] = 0, \ H_1 : \ E[D] < 0$$

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Односторонний тест

Для тестирования $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ против $H_1 : p_1 - p_2 < 0$, предположим $p_1 = p_2 = p_c$ (общая доля при нулевой гипотезе):

- Распределение *при нулевой гипотезе*:

$$\boxed{D \sim \mathcal{N}\left(0, \quad \tfrac{p_c(1-p_c)}{n} + \tfrac{p_c(1-p_c)}{m}\right) = \mathcal{N}\left(0, \quad p_c(1-p_c)\left(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m}\right)\right)}$$

- Используем z-статистику для преобразования данных в шкалу стандартного нормального распределения:

$$z_{\text{score}} = \boxed{\frac{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2}{\sqrt{p_c(1-p_c)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}}$$

- Объединённая (общая) доля p_c — это наша оценка общей доли при нулевой гипотезе:

$$p_c = \frac{\tilde{p}_1 n + \tilde{p}_2 m}{n + m}$$

- Правило принятия решения: Отклонить H_0, если $z_{\text{score}} < -z_\alpha$ в левостороннем тесте или если $z_{\text{score}} > z_\alpha$ в правостороннем тесте.

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Пример 1: решение

- **Гипотезы**: $H_0 : p_A = p_B$ против $H_1 : p_A < p_B$ (левосторонний тест)
- **Данные**: $n = 800$, $m = 400$, $\tilde{p}_A = 0.65$, $\tilde{p}_B = 0.72$, $\alpha = 0.05$
- **Объединённая доля**:

$$p_c = \frac{0.65 \cdot 800 + 0.72 \cdot 400}{800 + 400} = \frac{520 + 288}{1200} = 0.673$$

- z**-статистика**: $z_{0.05} = 1.645$

$$z_{\text{score}} = \frac{0.65 - 0.72}{\sqrt{0.673 \cdot 0.327 \cdot \left(\frac{1}{800} + \frac{1}{400}\right)}} = \frac{-0.07}{\sqrt{0.220 \cdot 0.00375}} \approx -2.58$$

- **Решение**: $z_{\text{score}} = -2.58 < -z_{0.05} = -1.645$, поэтому отклоняем H_0.
- **Вывод**: Имеются достаточно статистически значимые основания для утверждения, что новое лекарство более эффективно, чем стандартное лечение. Консервативная гипотеза отклоняется в пользу альтернативной.

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Пример 2: двусторонний тест

Сеть ресторанов сравнивает уровень удовлетворённости клиентов между двумя локациями. Вопрос: есть ли значимая разница в уровне удовлетворённости?

- Удовлетворённость клиентов — важный фактор успеха бизнеса. Понимание различий между локациями может помочь в распределении ресурсов и выборе стратегии развития.
- Данные:
  - Локация A: $n = 200$ клиентов, $\tilde{p}_A = 0.85$ (85% удовлетворены)
  - Локация B: $m = 200$ клиентов, $\tilde{p}_B = 0.78$ (78% удовлетворены)
- Гипотезы:
  - $H_0 : p_A = p_B$ (нет разницы в уровне удовлетворённости)
  - $H_1 : p_A \neq p_B$ (разные уровни удовлетворённости)

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Двусторонний тест

Для тестирования $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ против $H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$:

- Распределение *при нулевой гипотезе*:

$$\boxed{D \sim \mathcal{N}\left(0, \quad p_c(1-p_c)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right)}$$

- z-статистика:

$$z_{\text{score}} = \boxed{\frac{\tilde{p}_1-\tilde{p}_2}{\sqrt{p_c(1-p_c)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}}$$

- Объединённая доля:

$$p_c = \frac{\tilde{p}_1 n + \tilde{p}_2 m}{n+m}$$

- Правило принятия решения: Отклонить H_0, если $|z_{\text{score}}| > z_{\alpha/2}$.

Тестирование гипотез о разности долей двух бинарных признаков

Пример 2: решение

- **Гипотезы**: $H_0 : p_A = p_B$ против $H_1 : p_A \neq p_B$ (двусторонний тест)
- **Данные**: $n = 200$, $m = 200$, $\tilde{p}_A = 0.85$, $\tilde{p}_B = 0.78$, $\alpha = 0.05$
- **Объединённая доля**:

$$p_c = \frac{0.85 \cdot 200 + 0.78 \cdot 200}{200 + 200} = \frac{170 + 156}{400} = 0.815$$

- **z-статистика**: $z_{0.025} = 1.96$

$$z_{\text{score}} = \frac{0.85 - 0.78}{\sqrt{0.815 \cdot 0.185 \cdot \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{200}\right)}} = \frac{0.07}{\sqrt{0.151 \cdot 0.01}} \approx 1.80$$

- **Решение**: $|z_{\text{score}}| = 1.80 < z_{0.025} = 1.96$, поэтому не отклоняем H_0.
- **Вывод**: Результаты тестирования не предоставляют достаточных статистически значимых оснований для отклонения нулевой гипотезы. Нет достаточных оснований утверждать, что существует статистически значимая разница в уровне удовлетворённости клиентов между двумя локациями.

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Точечная оценка разности математических ожиданий

- Предположим, у нас есть две независимые выборки: $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$, $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$. Характеристики называем $\mu_X \equiv E[X_i]$, $\sigma_X^2 \equiv Var[X_i]$, и соответственно $\mu_Y \equiv E[Y_i]$, $\sigma_Y^2 \equiv Var[Y_i]$
- Нас интересует разность истинных математических ожиданий:

$$\theta = \mu_X - \mu_Y$$

- Введём точечную оценку $\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$ — разность двух выборочных средних.
- Свойства точечной оценки: $E[\hat{\theta}] = \mu_X - \mu_Y$, $Var[\hat{\theta}] = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}$.
- При n, $m > 30$ работает ЦПТ и распределение точечной оценки для θ:

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Пример 3: левосторонний тест

Интернет-магазин тестирует новый дизайн сайта против текущего дизайна. Вопрос: увеличивает ли новый дизайн среднюю стоимость заказа?

- Изменения в дизайне сайта могут значительно повлиять на поведение пользователей и выручку. Даже небольшие улучшения в средней стоимости заказа могут привести к существенному увеличению доходов.
- Данные:
  - Текущий дизайн (A): $n = 100$ клиентов, $\bar{x}_A = 85$ долларов, $s_A = 15$ долларов
  - Новый дизайн (B): $m = 100$ клиентов, $\bar{x}_B = 92$ доллара, $s_B = 18$ долларов
- Гипотезы:
  - $H_0 : \mu_A = \mu_B$ (нет разницы в средней стоимости заказа)
  - $H_1 : \mu_A < \mu_B$ (новый дизайн увеличивает среднюю стоимость заказа)

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Односторонний тест (тест Уэлча)

- Идея: мы можем ввести новую случайную величину $D = \bar{X} - \bar{Y}$
- Её параметры: $E[D] = \mu_X - \mu_Y$, $Var[D] = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}$
- Если $\mu_X = \mu_Y$, то $E[D] = 0$, если $\mu_X < \mu_Y$, то $E[D] < 0$
- Таким образом, задача сравнения μ_X с μ_Y сводится к тестированию математического ожидания одной случайной величины D:

$$H_0 : \ E[D] = 0, \ H_1 : \ E[D] < 0$$

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Односторонний тест (тест Уэлча)

Для тестирования $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ против $H_1 : \mu_X - \mu_Y < 0$:

- Распределение *при нулевой гипотезе*: $\boxed{\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)}$, $\boxed{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \sim t_k}$
- Число степеней свободы k задаётся формулой:

$$k \approx \frac{(V_X + V_Y)^2}{\frac{V_X^2}{n-1} + \frac{V_Y^2}{m-1}}, \text{ где } V_X = \frac{S_X^2}{n},\ V_Y = \frac{S_Y^2}{m}$$

- Используем t-статистику:

$$t_{\text{score}} = \boxed{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}}}$$

- Правило принятия решения: Отклонить H_0, если $t_{\text{score}} < -t_{(k,\alpha)}$ в левостороннем тесте или если $t_{\text{score}} > t_{(k,\alpha)}$ в правостороннем тесте.

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Пример 3: решение

- **Гипотезы**: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ против $H_1 : \mu_A < \mu_B$ (левосторонний тест)
- **Данные**: $n = 100$, $m = 100$, $\bar{x}_A = 85$, $\bar{x}_B = 92$, $s_A = 15$, $s_B = 18$, $\alpha = 0.05$
- **Степени свободы**:

$$V_A = \frac{15^2}{100} = 2.25, \quad V_B = \frac{18^2}{100} = 3.24$$

$$k = \frac{(2.25 + 3.24)^2}{\frac{2.25^2}{99} + \frac{3.24^2}{99}} = \frac{30.14}{0.051 + 0.106} \approx 192$$

- **t-статистика**: $t_{(192,0.05)} \approx 1.653$ (используем $t_{(200,0.05)}$ как приближение)

$$t_{\text{score}} = \frac{85 - 92}{\sqrt{\frac{15^2}{100} + \frac{18^2}{100}}} = \frac{-7}{\sqrt{2.25 + 3.24}} = \frac{-7}{2.34} \approx -2.99$$

- **Решение**: $t_{\text{score}} = -2.99 < -t_{(192,0.05)} \approx -1.653$, поэтому отклоняем H_0.
- **Вывод**: Имеются достаточно статистически значимые основания для утверждения, что новый дизайн увеличивает среднюю стоимость заказа по сравнению с текущим дизайном. Консервативная гипотеза отклоняется в пользу альтернативной.

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Пример 4: двусторонний тест

Производственная компания сравнивает эффективность производства между двумя заводами. Вопрос: есть ли значимая разница в среднем времени производства единицы продукции?

- Эффективность производства напрямую влияет на затраты и сроки доставки клиентам. Понимание различий в производительности помогает в распределении ресурсов и оптимизации процессов.
- Данные:
  - Завод A: $n = 100$ единиц, $\bar{x}_A = 45$ минут, $s_A = 8$ минут
  - Завод B: $m = 80$ единиц, $\bar{x}_B = 42$ минуты, $s_B = 7$ минут
- Гипотезы:
  - $H_0 : \mu_A = \mu_B$ (нет разницы в среднем времени производства)
  - $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$ (разные средние времена производства)

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Двусторонний тест (тест Уэлча)

Для тестирования $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ против $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$:

- Распределение *при нулевой гипотезе*: $\boxed{\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)}$, $\boxed{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}} \sim t_k}$
- Число степеней свободы:

$$k \approx \frac{(V_X + V_Y)^2}{\frac{V_X^2}{n-1} + \frac{V_Y^2}{m-1}}, \text{ где } V_X = \frac{S_X^2}{n},\ V_Y = \frac{S_Y^2}{m}$$

- t-статистика:

$$t_{\text{score}} = \boxed{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n}+\frac{s_Y^2}{m}}}}$$

- Правило принятия решения: Отклонить H_0, если $|t_{\text{score}}| > t_{(k,\alpha/2)}$.

Гипотезы о разности математических ожиданий при неизвестных дисперсиях

Пример 4: решение

- **Гипотезы**: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ против $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$ (двусторонний тест)
- **Данные**: $n = 100$, $m = 80$, $\bar{x}_A = 45$, $\bar{x}_B = 42$, $s_A = 8$, $s_B = 7$, $\alpha = 0.05$
- **Степени свободы**:

$$V_A = \frac{8^2}{100} = 0.64, \quad V_B = \frac{7^2}{80} = 0.613$$

$$k = \frac{(0.64 + 0.613)^2}{\frac{0.64^2}{99} + \frac{0.613^2}{79}} = \frac{1.57}{0.0041 + 0.0048} \approx 175$$

- **t-статистика**: $t_{(175,0.025)} \approx 1.976$ (используем $t_{(200,0.025)}$ как приближение)

$$t_{\text{score}} = \frac{45 - 42}{\sqrt{\frac{8^2}{100} + \frac{7^2}{80}}} = \frac{3}{\sqrt{0.64 + 0.613}} = \frac{3}{1.12} \approx 2.68$$

- **Решение**: $|t_{\text{score}}| = 2.68 > t_{(175,0.025)} \approx 1.976$, поэтому отклоняем H_0.
- **Вывод**: Имеются достаточно статистически значимые основания для утверждения, что существует разница в среднем времени производства между двумя заводами. Консервативная гипотеза отклоняется в пользу альтернативной.

Гипотезы о разности матожиданий при неизвестных, но предположительно равных дисперсиях

Точечная оценка разности математических ожиданий

- Предположим, у нас есть две независимые выборки: $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$, $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$. Характеристики называем $\mu_X \equiv E[X_i]$, $\sigma_X^2 \equiv Var[X_i]$, и соответственно $\mu_Y \equiv E[Y_i]$, $\sigma_Y^2 \equiv Var[Y_i]$
- Дисперсии σ_X^2 и σ_Y^2 **неизвестны**, но для простоты предполагаем, что они равны: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.
- Нас интересует разность истинных математических ожиданий:

$$\theta = \mu_X - \mu_Y$$

- Введём точечную оценку $\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$ — разность двух выборочных средних.
- Свойства точечной оценки: $E[\hat{\theta}] = \mu_X - \mu_Y$, $Var[\hat{\theta}] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$.
- При n, $m > 30$ работает ЦПТ и распределение точечной оценки для θ:

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right)$$

- Проблема: мы не можем использовать σ^2 при тестировании гипотез, так как дисперсия неизвестна!

Гипотезы о разности матожиданий при неизвестных, но предположительно равных дисперсиях

Объединенная выборочная дисперсия

- Решение: заменяем неизвестную дисперсию σ^2 на её оценку — объединённую выборочную дисперсию S_p^2, и используем t-распределение вместо нормального.
- Вводим t-распределённую переменную:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{(n+m-2)}$$

- Объединённая дисперсия S_p^2 — это взвешенное среднее выборочных дисперсий:

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

- **Интуиция**: мы "объединяем" информацию о дисперсии из обеих выборок, используя веса, пропорциональные размерам выборок минус один (степени свободы). Идея в том, что чем больше размер выборки, тем точнее реализации выборочной дисперсии, и тем больше будет вес у этого слагаемого в сумме.
- Число степеней свободы: $n + m - 2$ (сумма степеней свободы обеих выборок).

Гипотезы о разности матожиданий при неизвестных, но предположительно равных дисперсиях

Для тестирования $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ против $H_1 : \mu_X - \mu_Y \gtrless 0$ или $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$.

- Распределение *при нулевой гипотезе*: $\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right)$, $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{(n+m-2)}$
- Используем t-статистику:

$$t_{\text{score}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

- где s_p^2 — реализация объединённой дисперсии:

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}$$

- Правило принятия решения: Отклонить H_0, если $t_{\text{score}} < -t_{(n+m-2,\alpha)}$ в левостороннем тесте или если $t_{\text{score}} > t_{(n+m-2,\alpha)}$ в правостороннем тесте.
- Для двустороннего теста: Отклонить H_0, если $|t_{\text{score}}| > t_{(n+m-2,\alpha/2)}$.

Модель простой линейной регрессии

Модель простой линейной регрессии предполагает, что существует прямая с коэффициентом сдвига α и наклоном β, называемая истинной или генеральной линией регрессии. Когда фиксируется значение независимой переменной x и делается наблюдение зависимой переменной y:

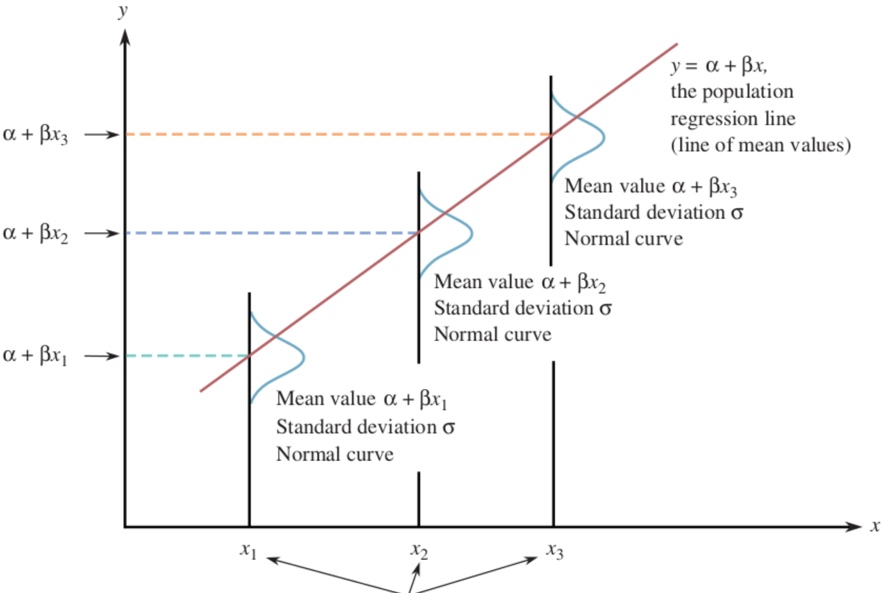
$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

Предполагаем, что некоторая случайная величина Y зависит от X линейным образом. Может не быть сильной линейной зависимости, но по крайней мере есть тренд линейного изменения одного параметра относительно другого.

Основные предположения модели

1. Распределение ε при любом конкретном значении x имеет среднее значение 0. То есть $\mu_\varepsilon = 0$.
2. Стандартное отклонение (σ) величины ε (которое описывает разброс её распределения) одинаково для любого конкретного значения x.
3. Распределение ε при любом конкретном значении x нормальное, т.е. $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
4. Случайные отклонения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, связанные с разными наблюдениями, независимы друг от друга.

Иллюстрация модели регрессии



Поведение при различных значениях σ

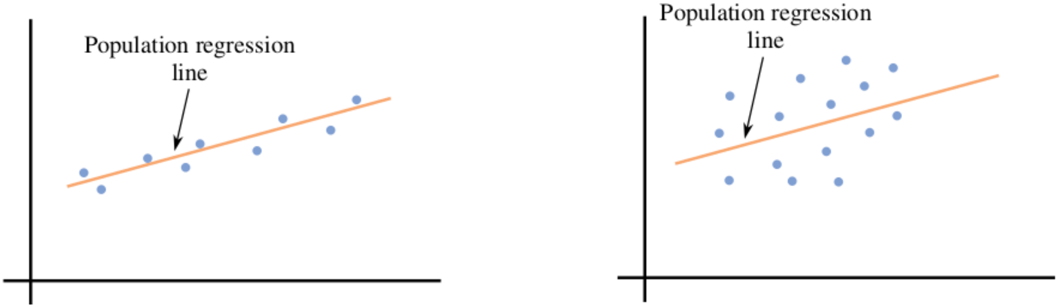


Рис. 2: Поведение при различных значениях σ

Точечная оценка параметров

МНК: Метод Наименьших Квадратов

Выборочные средние:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Суммы квадратов:

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2, \quad S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Оценки параметров:

$$\boxed{\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}, \quad \hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}}$$

Полученная (оценочная) линейная функция:

$$\boxed{\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x}$$

Коэффициент корреляции

Выборочный коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Можно использовать его для двустороннего теста, есть ли связь между переменными в генеральной совокупности.

Распределение:

Следующая функция коэффициента корреляции ведёт себя как t-переменная Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы (при нулевой гипотезе $\rho = 0$):

$$\boxed{r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{(n-2)}}$$

Тест независимости

Гипотезы:

$$H_0 : \rho = 0 \quad \text{(Нет корреляции между переменными в генеральной совокупности)}$$
$$H_1 : \rho \neq 0 \quad \text{(Есть корреляция между переменными в генеральной совокупности)}$$

Правило принятия решения:

- Подставляя выборочное значение r, которое мы получили, вычисляем t_{score} теста:

$$t_{\text{score}} = \boxed{r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}}$$

- После этого действуем обычным образом, сравнивая координаты критической точки $t_{(n-2,\alpha/2)}$ и полученный t_{score} теста.
- Отклонить H_0, если $|t_{\text{score}}| > t_{(n-2,\alpha/2)}$