Теория вероятностей и математическая статистика

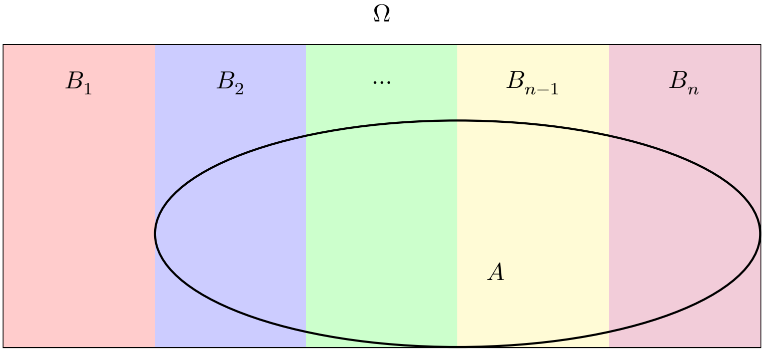
Полная вероятность. Формула Байеса. Случайные величины.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

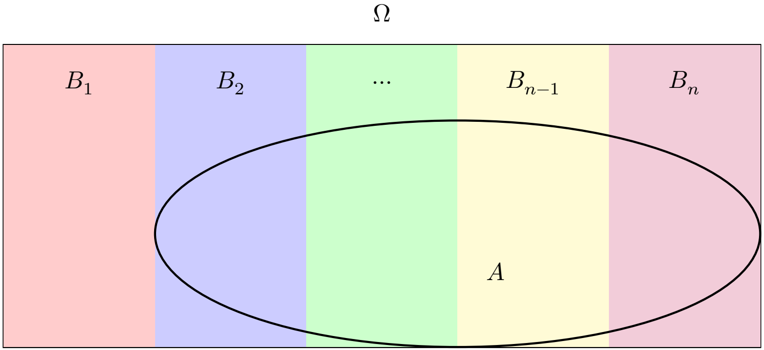
Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей, концепцией полной вероятности.



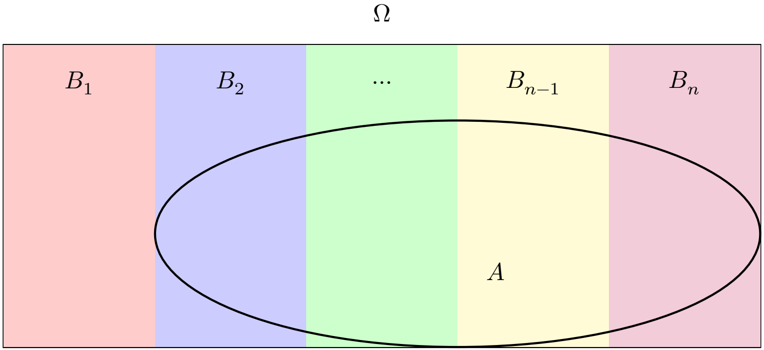
Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей, концепцией полной вероятности.
- Рассмотрим зафиксированное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Назовем **разбиением** Ω коллекцию событий $\{B_k,\ k \in I\}$, таких что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup B_i = \Omega$.



Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей, концепцией полной вероятности.
- Рассмотрим зафиксированное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Назовем **разбиением** Ω коллекцию событий $\{B_k,\ k \in I\}$, таких что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup B_i = \Omega$.
- Вдобавок, рассмотрим какое-то другое событие B, которое пересекается с какими-то событиями из разбиения, но не обязано пересекаться со всеми.



Полная вероятность

Если $\{B_1, B_2, \dots\}$ - разбиение Ω, с $P(B_i) > 0 \ \forall i$, то:

$$\boxed{P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i), \ \forall A \in \mathcal{F}}$$

Доказательство. Заметим, что мы можем реконструировать событие A из его частичек-пересечений со всеми B_i: $A = \bigcup_i (A \cap B_i)$. Эти кусочки $\{A \cap B_i\}$ попарно не пересекаются, как и оригинальные элементы разбиения. Поэтому далее можем применить свойство аддитивности вероятности:

$$P(A) = P\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right)$$
$$= \sum_i P\left(A \cap B_i\right) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

Теорема Байеса

Пусть $\{B_1, B_2, ...\}$ - разбиение Ω, с $P(B_i) > 0\ \forall i$. Тогда для любого события A, $P(A) > 0$, справедливо:

$$\boxed{P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum\limits_i P(A|B_i)P(B_i)}}$$

Доказательство.

Опираемся на то, что $P(X \cap Y)$ может быть выражена через разные условные вероятности:

$$P(X \cap Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X).$$

Применим это к условию

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)},$$

где $P(A) = \sum\limits_i P(A|B_i)P(B_i)$ как полная вероятность.

Пример 1

Вероятность победы лошади в скачках равна 0.3, если погода сухая, и 0.5 если идет дождь. Прогноз погоды дает вероятность дождя 40%.

1. Найдите вероятность победы лошади.
2. Если вы знаете, что лошадь проиграла гонку, какова вероятность того, что погода была сухой в день скачек? (Предположим, что вы не помните!)

Пример 1

Вероятность победы лошади в скачках равна 0.3, если погода сухая, и 0.5 если идет дождь. Прогноз погоды дает вероятность дождя 40%.

1. Найдите вероятность победы лошади.
2. Если вы знаете, что лошадь проиграла гонку, какова вероятность того, что погода была сухой в день скачек? (Предположим, что вы не помните!)

- $P(V) = P(V|D)P(D) + P(V|W)P(W) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.38$

Пример 1

Вероятность победы лошади в скачках равна 0.3, если погода сухая, и 0.5 если идет дождь. Прогноз погоды дает вероятность дождя 40%.

1. Найдите вероятность победы лошади.
2. Если вы знаете, что лошадь проиграла гонку, какова вероятность того, что погода была сухой в день скачек? (Предположим, что вы не помните!)

- $P(V) = P(V|D)P(D) + P(V|W)P(W) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.38$
- $$P(D|\bar{V}) = \frac{P(\bar{V}|D)P(D)}{P(\bar{V})} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{1 - 0.38} \approx 0.677$$

Пример 2 (False positives)

- Редкое, но опасное заболевание имеет распространенность 1 на 10^5 в общей популяции. Существует диагностический тест, но он несовершенен. Если у человека есть заболевание, тест положительный с вероятностью 0.9; если нет - тест положительный с вероятностью $\frac{1}{20}$. Тест дал положительный результат. Какова вероятность того, что у человека **действительно** есть заболевание?

Пример 2 (False positives)

- Редкое, но опасное заболевание имеет распространенность 1 на 10^5 в общей популяции. Существует диагностический тест, но он несовершенен. Если у человека есть заболевание, тест положительный с вероятностью 0.9; если нет - тест положительный с вероятностью $\frac{1}{20}$. Тест дал положительный результат. Какова вероятность того, что у человека **действительно** есть заболевание?
- Обозначим вероятности: (H = healthy, I = ill, $+$ for detected positive, $-$ for detected negative) $P(I) = 10^{-5}$, $P(+|I) = 0.9$, $P(+|H) = \frac{1}{20}$. Мы заинтересованы в $P(I|+)$.

Пример 2 (False positives)

- Редкое, но опасное заболевание имеет распространенность 1 на 10^5 в общей популяции. Существует диагностический тест, но он несовершенен. Если у человека есть заболевание, тест положительный с вероятностью 0.9; если нет - тест положительный с вероятностью $\frac{1}{20}$. Тест дал положительный результат. Какова вероятность того, что у человека **действительно** есть заболевание?
- Обозначим вероятности: (H = healthy, I = ill, $+$ for detected positive, $-$ for detected negative) $P(I) = 10^{-5}$, $P(+|I) = 0.9$, $P(+|H) = \frac{1}{20}$. Мы заинтересованы в $P(I|+)$.
- $P(+) = P(+|I)P(I) + P(+|H)P(H) = 0.9 \cdot 10^{-5} + 0.05 \cdot (1 - 10^{-5}) = 0.0500085$

Пример 2 (False positives)

- Редкое, но опасное заболевание имеет распространенность 1 на 10^5 в общей популяции. Существует диагностический тест, но он несовершенен. Если у человека есть заболевание, тест положительный с вероятностью 0.9; если нет - тест положительный с вероятностью $\frac{1}{20}$. Тест дал положительный результат. Какова вероятность того, что у человека **действительно** есть заболевание?
- Обозначим вероятности: (H = healthy, I = ill, $+$ for detected positive, $-$ for detected negative) $P(I) = 10^{-5}$, $P(+|I) = 0.9$, $P(+|H) = \frac{1}{20}$. Мы заинтересованы в $P(I|+)$.
- $P(+) = P(+|I)P(I) + P(+|H)P(H) = 0.9 \cdot 10^{-5} + 0.05 \cdot (1 - 10^{-5}) = 0.0500085$
- $$P(I|+) = \frac{P(+|I)P(I)}{P(+)} = \frac{0.9 \cdot 10^{-5}}{0.0500085} \approx 0.0002$$

Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.

Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.
- Можем ли мы также прикрепить число к каждому элементарному исходу независимо от его природы, а затем оперировать **только** в пространстве чисел? Спойлер: это даст нам новые инструменты, которые недоступны, если мы работаем с исходами разной природы.

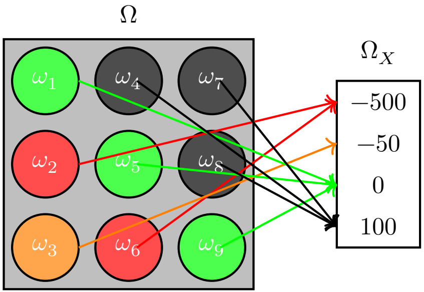
Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.
- Можем ли мы также прикрепить число к каждому элементарному исходу независимо от его природы, а затем оперировать **только** в пространстве чисел? Спойлер: это даст нам новые инструменты, которые недоступны, если мы работаем с исходами разной природы.
- Пример: игральная кость с 6 гранями, 2 грани желтые, 2 грани зеленые, 2 грани черные, без чисел - мы можем искусственно прикрепить числа $1, 2, 3$ к каждому цвету.

Случайные величины: Формальное определение

Результирующее 'прикрепленное' число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

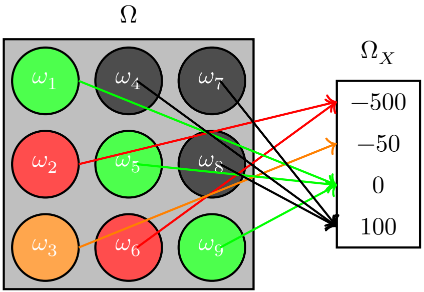


Случайные величины: Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

1. Образ $X(\Omega) = \Omega_X = Im\,X$ (все возможные результаты) является счетным подмножеством $\mathbb{R}$,

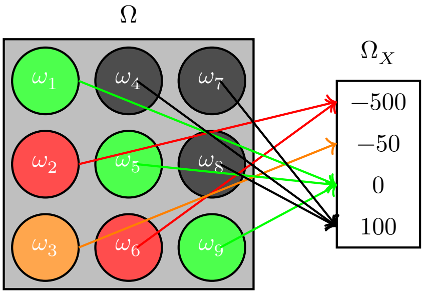


Случайные величины: Формальное определение

Результирующее 'прикрепленное' число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

1. Образ $X(\Omega) = \Omega_X = Im\, X$ (все возможные результаты) является счетным подмножеством $\mathbb{R}$,
2. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathbb{R}$.



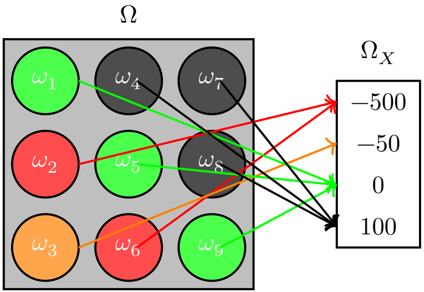
Случайные величины: Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

1. Образ $X(\Omega) = \Omega_X = Im\, X$ (все возможные результаты) является счетным подмножеством $\mathbb{R}$,
2. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathbb{R}$.

- Для упрощения мы сокращаем события вида $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ до более простого вида $\{X = x\}$.



Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

1. $p_X(x) \geq 0$ для $\forall x \in \Omega_X$, $p_X(x) = 0$ для $x \notin \Omega_X$

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

1. $p_X(x) \geq 0$ для $\forall x \in \Omega_X$, $p_X(x) = 0$ для $x \notin \Omega_X$
2. $\sum\limits_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = 1.$

$$\sum_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = \sum_{x_i \in \Omega_X} P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\left(\bigcup_{x_i \in \Omega_X} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\left(\Omega\right) = 1.$$

Случайные величины: Пример

Подбрасываются две монеты. Первая монета выпадает орлом с вероятностью 0.6, вторая с вероятностью 0.7. Предположим, что результаты подбрасываний независимы, и пусть X равно общему количеству выпавших орлов. Постройте дискретную случайную величину и её функцию вероятности.

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, $x_1, \dots, x_k \in \Omega_X$.

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $x_1, \ldots, x_k \in \Omega_X$.
- Для вычисления $P(A)$ мы используем принцип аддитивности:

$$P(A) = P(\{X = x_1\} \cup \ldots \cup \{X = x_k\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{X = x_i\}).$$

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, $x_1, \dots, x_k \in \Omega_X$.
- Для вычисления $P(A)$ мы используем принцип аддитивности:

$$P(A) = P(\{X = x_1\} \cup \dots \cup \{X = x_k\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{X = x_i\}).$$

- В конечном счете, мы можем забыть о нашем оригинальном $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, скрыть их ‘под капотом’ нашего случайного эксперимента. Вместо этого мы используем новое пространство Ω_X всех возможных значений С.В. и $p_X(x)$ как новую функцию вероятности.