

Теория вероятностей и математическая статистика

Непрерывные случайные величины. Распределение Пуассона.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

Мотивация для нового класса случайных величин

Пример 1: Физические измерения

- Рост человека
- Температура воздуха
- Скорость автомобиля

Пример 2: Время ожидания

- Время "жизни" детали
- Время между звонками в call-центр

Пример 3: Экономические показатели

- Доходы компании
- Цены на акции

Пример 4: Технические параметры

- Напряжение в сети
- Давление в шинах
- Концентрация вещества

Почему дискретные СВ не подходят?

- **Бесконечное количество значений:** Время может быть 1.234567 секунды
- **Непрерывность:** Между любыми двумя значениями есть промежуточные
- **Точность измерений:** Современные приборы дают очень точные результаты

Вероятность в точке теряет смысл

- Для непрерывных величин вероятность **точечного** события $P(X = a)$ всегда равна нулю
- Отныне нас будет интересовать только вероятности попадания в **интервалы**:

$$P(a < X < b), P(X > c), P(X < d)$$

Физическое Лирическое вступление

- Вспомним физику 8-го класса и формулу

$$m = \rho \cdot V, \quad [kg] = \left[\frac{kg}{m^3} \right] [m^3]$$

Физическое Лирическое вступление

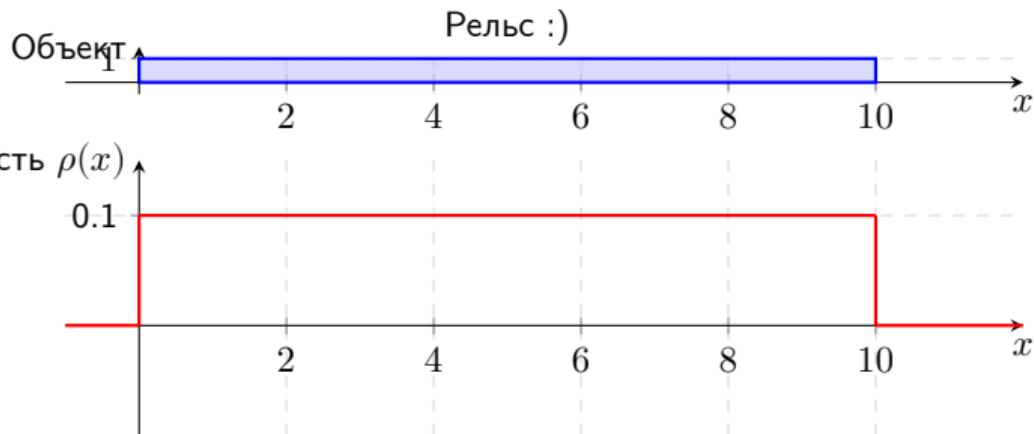
- Вспомним физику 8-го класса и формулу

$$m = \rho \cdot V, \quad [kg] = \left[\frac{kg}{m^3} \right] [m^3]$$

- Можем перейти к линейной или погонной плотности $\rho_l = \left[\frac{kg}{m} \right]$, которая покажет нам массу единицы длины некоторого объекта (метр проволоки, метр провода, метр плитки шоколада). Тогда масса объекта длины L будет:

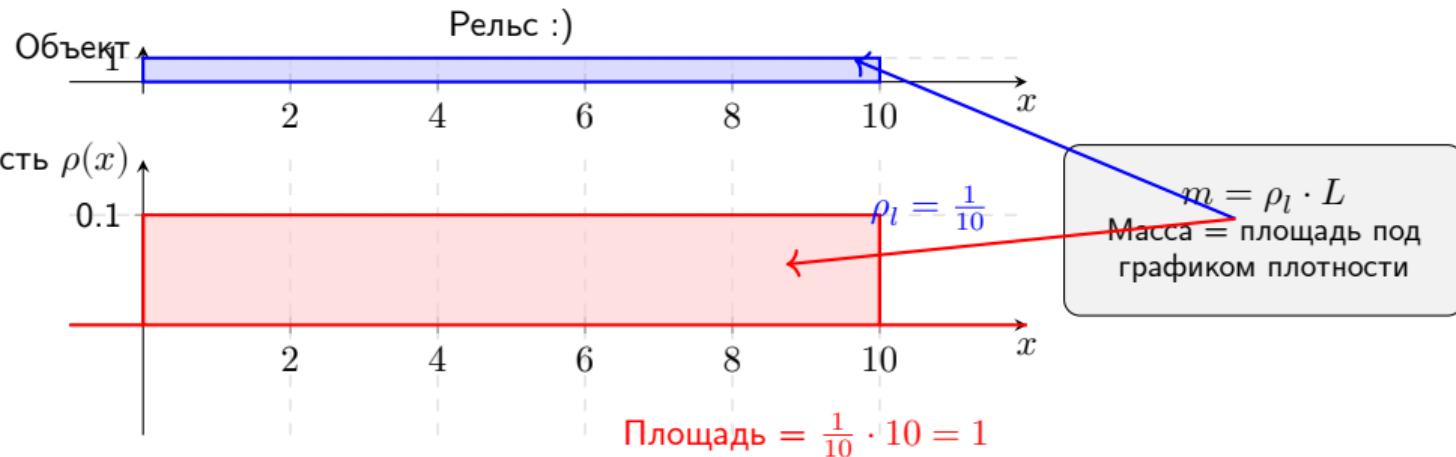
$$m = \rho_l \cdot L$$

Связь линейной плотности и массы



$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & x > 10 \end{cases}$$

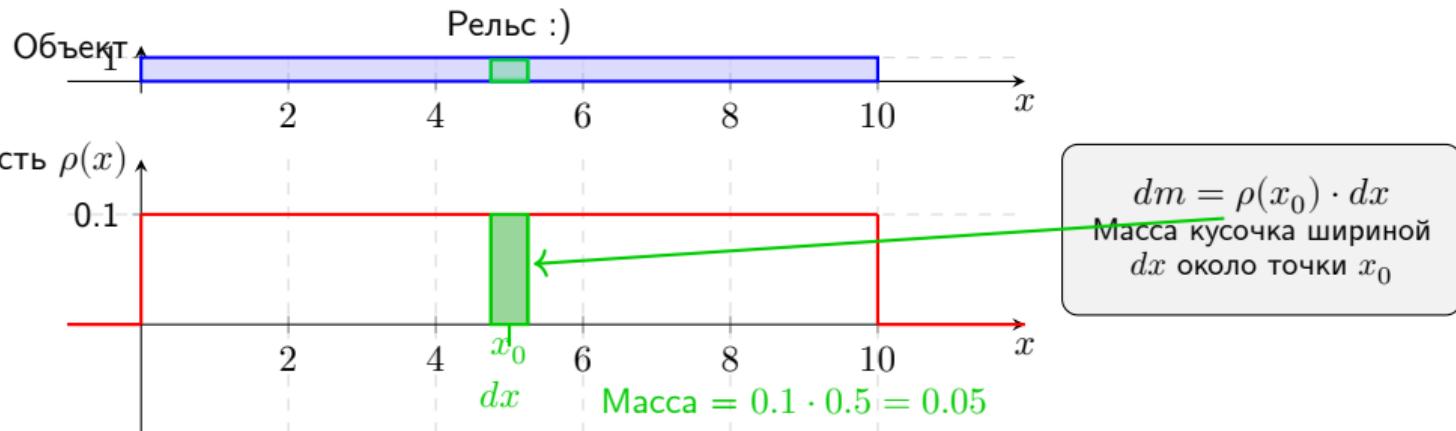
Связь линейной плотности и массы



Связь линейной плотности и массы

Значение плотности в точке

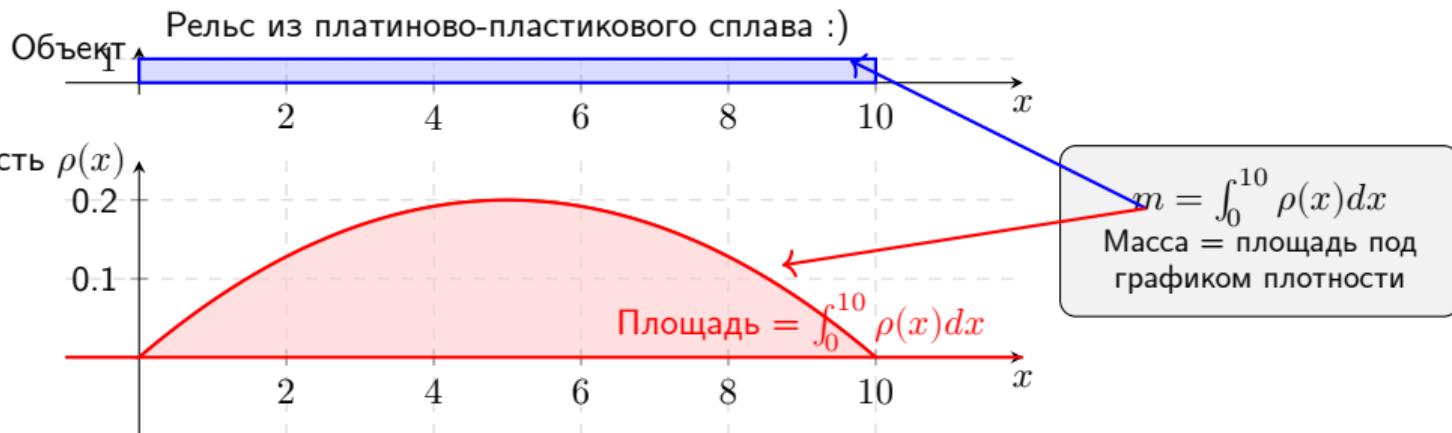
- Само по себе значение функции плотности $\rho(x_0)$ не обозначает массу в точке x_0 . Смысл несет именно произведение плотности на длину, вспомним, чтобы сократились размерности $[kg] = \left[\frac{kg}{m}\right] [m]$



Связь линейной плотности и массы

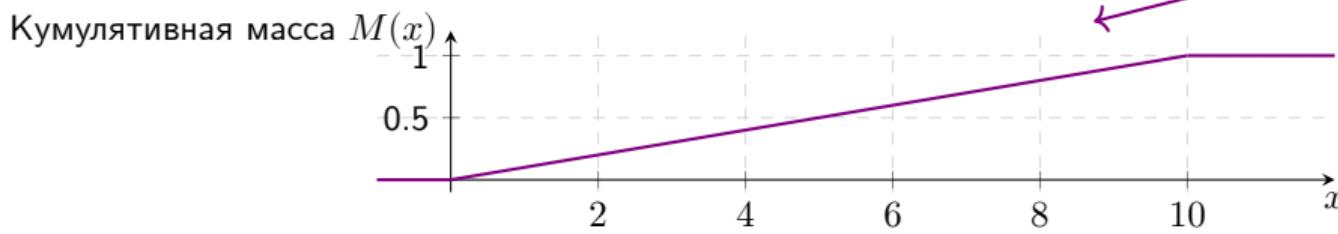
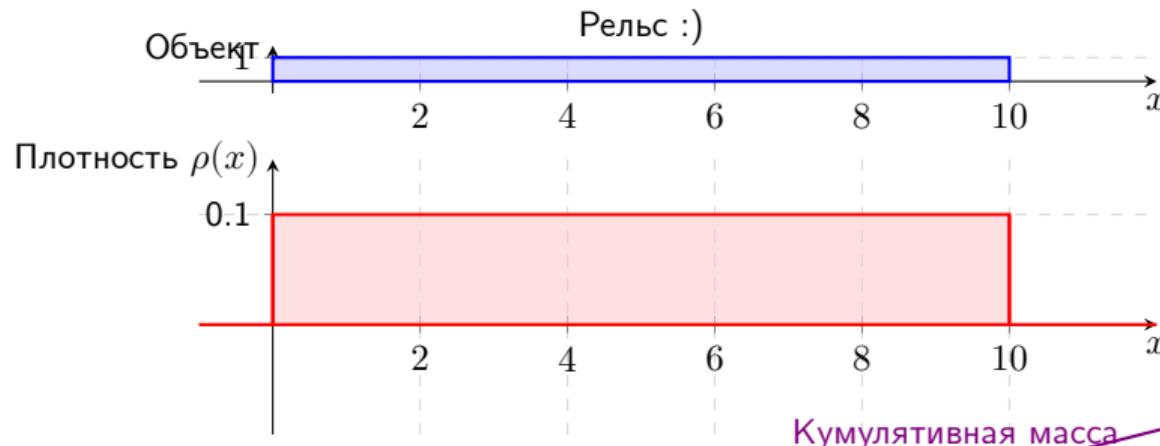
Переменная плотность

- Не всегда линейная плотность является постоянной! В нашей аналогии из физики мы можем себе представить рельс, у которого единица длины плавно становится тяжелее от краев к центру.



Кумулятивная масса

- Теперь мы хотим ввести функцию, которая покажет нам, сколько массы “скопилось” к координате x .



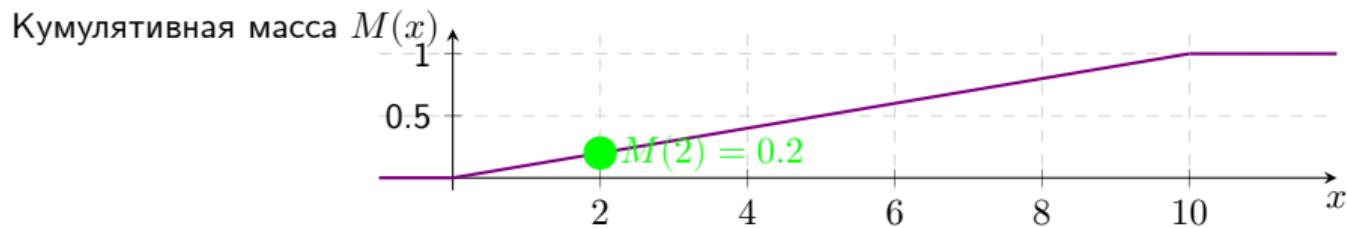
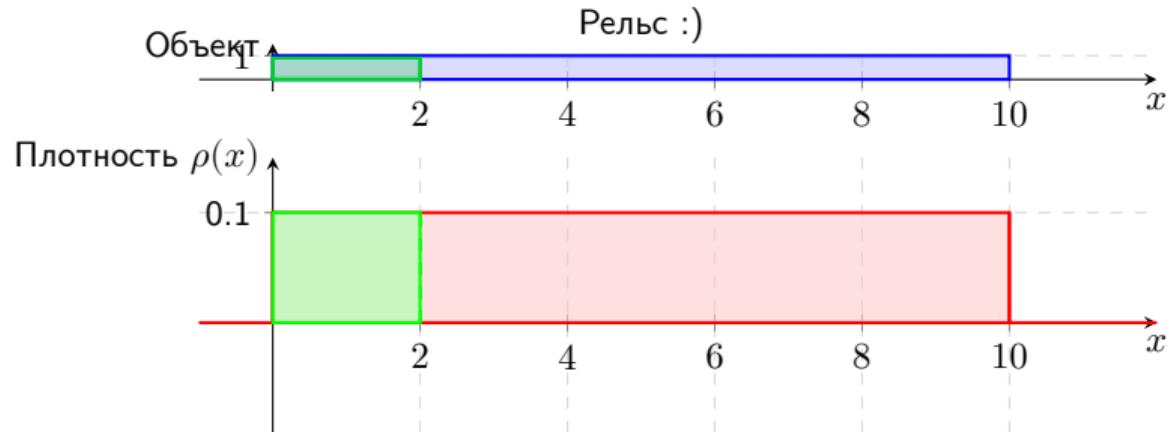
$$M(x) = \int_0^x \rho(t) dt$$

Кумулятивная масса

$$M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

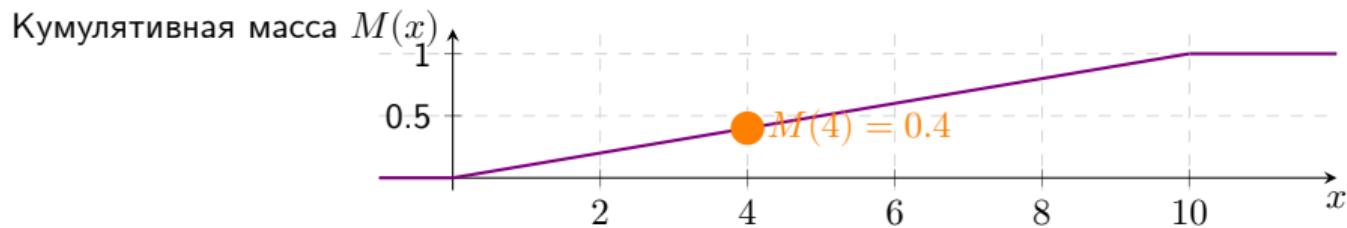
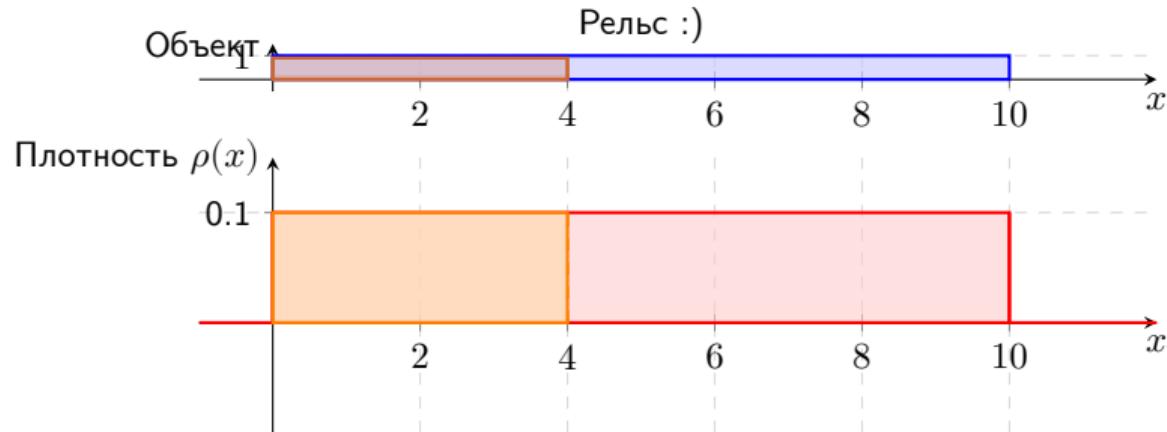
Кумулятивная масса

Пример 1



Кумулятивная масса

Пример 2



Функция плотности вероятности

- Мы называем X непрерывной случайной величиной, если существует неотрицательная функция $f_X(x)$, определенная для $\forall x \in \mathbb{R}$, такая что любая вероятность вида $P(a \leq X \leq b)$ может быть найдена по формуле:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Функция плотности вероятности

- Мы называем X непрерывной случайной величиной, если существует неотрицательная функция $f_X(x)$, определенная для $\forall x \in \mathbb{R}$, такая что любая вероятность вида $P(a \leq X \leq b)$ может быть найдена по формуле:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

- Нормировка вероятности. Поскольку $P(\Omega_X)$ должно быть равно 1, здесь мы имеем:

$$1 = P(\Omega_X) = P\{X \in (-\infty, +\infty)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$$

Функция распределения(кумулятивная / интегральная)

- Кумулятивная функция распределения случайной величины X - это неубывающая функция $F_X(x)$, определенная для $\forall x \in \mathbb{R}$, такая что:

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = P\{X \leq x\}$$

Функция распределения(кумулятивная / интегральная)

- Кумулятивная функция распределения случайной величины X - это неубывающая функция $F_X(x)$, определенная для $\forall x \in \mathbb{R}$, такая что:

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = P\{X \leq x\}$$

- Для непрерывной случайной величины мы можем переписать это как:

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Функция распределения(кумулятивная / интегральная)

- Кумулятивная функция распределения случайной величины X - это неубывающая функция $F_X(x)$, определенная для $\forall x \in \mathbb{R}$, такая что:

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = P\{X \leq x\}$$

- Для непрерывной случайной величины мы можем переписать это как:

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

- Основные свойства:

$$F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1$$

Кумулятивная функция распределения как способ избежать интегрирования

- Предположим, нас интересует $P(a < X < b)$. Рассмотрим интервал $\mathcal{D} = (-\infty, b)$. Его можно разложить на объединение двух непересекающихся множеств: $\mathcal{D} = (-\infty, a] \cup (a, b)$.

Кумулятивная функция распределения как способ избежать интегрирования

- Предположим, нас интересует $P(a < X < b)$. Рассмотрим интервал $\mathcal{D} = (-\infty, b)$. Его можно разложить на объединение двух непересекающихся множеств: $\mathcal{D} = (-\infty, a] \cup (a, b)$.
- Согласно принципу аддитивности вероятности:

$$P\{X \in \mathcal{D}\} = P\{X \in (-\infty, a]\} + P\{X \in (a, b)\}$$

Кумулятивная функция распределения как способ избежать интегрирования

- Предположим, нас интересует $P(a < X < b)$. Рассмотрим интервал $\mathcal{D} = (-\infty, b)$. Его можно разложить на объединение двух непересекающихся множеств: $\mathcal{D} = (-\infty, a] \cup (a, b)$.
- Согласно принципу аддитивности вероятности:

$$P\{X \in \mathcal{D}\} = P\{X \in (-\infty, a]\} + P\{X \in (a, b)\}$$

- В интегральной формулировке:

$$\int_{-\infty}^b f_X(x)dx = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx + \int_a^b f_X(x)dx$$

Кумулятивная функция распределения как способ избежать интегрирования

- Предположим, нас интересует $P(a < X < b)$. Рассмотрим интервал $\mathcal{D} = (-\infty, b)$. Его можно разложить на объединение двух непересекающихся множеств: $\mathcal{D} = (-\infty, a] \cup (a, b)$.
- Согласно принципу аддитивности вероятности:

$$P\{X \in \mathcal{D}\} = P\{X \in (-\infty, a]\} + P\{X \in (a, b)\}$$

- В интегральной формулировке:

$$\int_{-\infty}^b f_X(x)dx = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx + \int_a^b f_X(x)dx$$

- Наконец:

$$\boxed{\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)}$$

Функция плотности вероятности является производной от функции распределения:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

Пример: анализ функции плотности

- Пусть функция плотности случайной величины X задана в виде:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найдите нормировочную константу, постройте функцию распределения, посчитайте вероятности $P(-5 < X < 2)$, $P(X > 1)$.

Пример: анализ функции плотности

- Пусть функция плотности случайной величины X задана в виде:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найдите нормировочную константу, постройте функцию распределения, посчитайте вероятности $P(-5 < X < 2)$, $P(X > 1)$.

- Проверяем выполнение условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^0 \cancel{f_X(x)} dx + \int_0^3 \cancel{f_X(x)} dx + \int_3^{+\infty} \cancel{f_X(x)} dx = \int_{-\infty}^0 \cancel{0} dx + \int_0^3 \cancel{cx^2} dx + \int_3^{+\infty} \cancel{0} dx = 1$$
$$c \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{9}$$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$
- Рассматриваем так же три области. Первая область $\forall x < 0$. Мы знаем, что функция плотности в этой области равна нулю.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$
- Рассматриваем так же три области. Первая область $\forall x < 0$. Мы знаем, что функция плотности в этой области равна нулю.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- Вторая область $\forall x \in [0, 3]$. Знаем, что на этом интервале у функции плотности определенный вид, плюс не забудем, что мы еще ранее нашли нормировочную константу.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1t^2}{9} dt = 0 + \frac{t^3}{27} \Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$
- Рассматриваем так же три области. Первая область $\forall x < 0$. Мы знаем, что функция плотности в этой области равна нулю.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- Вторая область $\forall x \in [0, 3]$. Знаем, что на этом интервале у функции плотности определенный вид, плюс не забудем, что мы еще ранее нашли нормировочную константу.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1t^2}{9} dt = 0 + \frac{t^3}{27} \Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$$

- Третья область $\forall x > 3$:

$$\int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^3 f_X(t)dt + \int_3^{+\infty} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^3 \frac{1t^2}{9} dt + \int_3^{+\infty} 0 dt = 1$$

Пример: анализ функции плотности

- Финально, корректная запись функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Пример: анализ функции плотности

- Финально, корректная запись функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

- Посчитаем вероятности через основное определение и через функцию распределения и сравним результаты.

$$P(-5 < X < 2) = \int_{-5}^2 f_X(x) dx = \int_{-5}^0 \textcolor{red}{f_X(x)} dx + \int_0^2 \textcolor{violet}{f_X(x)} dx = \int_{-5}^0 \mathbf{0} dx + \int_0^2 \frac{1x^2}{9} dx = \frac{x^3}{27} \Big|_0^2 = \frac{8}{27}$$

$$P(-5 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-5) = \frac{8}{27} - 0$$

$$P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^3 \textcolor{violet}{f_X(x)} dx + \int_3^{+\infty} \textcolor{blue}{f_X(x)} dx = \int_1^3 \frac{1x^2}{9} dx + \int_3^{+\infty} \mathbf{0} dx = \frac{x^3}{27} \Big|_1^3 = \frac{26}{27}$$

$$P(X > 1) = F_X(+\infty) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{27}$$

Распределение Пуассона

- Что происходит с биномиальным распределением, когда n очень велико, а p очень мало, но произведение np остается конечным?

Распределение Пуассона

- Что происходит с биномиальным распределением, когда n очень велико, а p очень мало, но произведение np остается конечным?
- **Распределение Пуассона** описывает количество событий, происходящих в фиксированном интервале времени или пространства, при условии, что события происходят независимо с постоянной средней интенсивностью. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначается как $X \sim Poisson(\lambda)$.

Распределение Пуассона

- Что происходит с биномиальным распределением, когда n очень велико, а p очень мало, но произведение np остается конечным?
- **Распределение Пуассона** описывает количество событий, происходящих в фиксированном интервале времени или пространства, при условии, что события происходят независимо с постоянной средней интенсивностью. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначается как $X \sim Poisson(\lambda)$.

- Параметр λ - это **интенсивность** (среднее количество событий за единицу времени/пространства).

Связь с биномиальным распределением

- Распределение Пуассона возникает как **пределный случай** биномиального распределения:

💡 Приближение Пуассона

Если $Y \sim Bin(n, p)$ и $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ таким образом, что $np \rightarrow \lambda$, то:

$$P(Y = k) \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Характеристики распределения Пуассона



Основные характеристики

Для случайной величины $X \sim Poisson(\lambda)$:

- **Математическое ожидание:**

$$E[X] = \lambda$$

Замечательное свойство: У распределения Пуассона математическое ожидание равно дисперсии!

Характеристики распределения Пуассона



Основные характеристики

Для случайной величины $X \sim Poisson(\lambda)$:

- **Математическое ожидание:**

$$E[X] = \lambda$$

- **Дисперсия:**

$$Var[X] = \lambda$$

Замечательное свойство: У распределения Пуассона математическое ожидание равно дисперсии!

Характеристики распределения Пуассона



Основные характеристики

Для случайной величины $X \sim Poisson(\lambda)$:

- **Математическое ожидание:**

$$E[X] = \lambda$$

- **Дисперсия:**

$$Var[X] = \lambda$$

- **Стандартное отклонение:**

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Замечательное свойство: У распределения Пуассона математическое ожидание равно дисперсии!

Пример: приближение биномиального распределения

Завод производит 1000 деталей в день, вероятность брака для каждой детали = 0.002.

Биномиальное распределение: $Y \sim Bin(1000, 0.002)$: $E[Y] = 1000 \cdot 0.002 = 2$,
 $Var[Y] = 1000 \cdot 0.002 \cdot 0.998 = 1.996$

Приближение Пуассона: $X \sim Poisson(2)$: $E[X] = 2$, $Var[X] = 2$

Сравнение вероятностей:

$$P(Y = 0) = (0.998)^{1000} \approx 0.1353$$

$$P(X = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} \approx 0.1353$$

Пример: количество звонков в call-центр

В call-центр поступает в среднем 3 звонка в минуту. Какова вероятность получить ровно 5 звонков за минуту?

- $X \sim Poisson(3)$ - количество звонков за минуту

$$P(X = 5) = \frac{3^5 e^{-3}}{5!} = \frac{243 \cdot e^{-3}}{120} = \frac{243 \cdot 0.0498}{120} \approx 0.101$$

Вероятность получить не более 2 звонков:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9e^{-3}}{2} = e^{-3}(1 + 3 + 4.5) = 8.5e^{-3} \approx 0.423 \end{aligned}$$

Пример: количество звонков в call-центр

В call-центр поступает в среднем 3 звонка в минуту. Какова вероятность получить ровно 5 звонков за минуту?

- $X \sim Poisson(3)$ - количество звонков за минуту
- $\lambda = 3$ звонка/минуту

$$P(X = 5) = \frac{3^5 e^{-3}}{5!} = \frac{243 \cdot e^{-3}}{120} = \frac{243 \cdot 0.0498}{120} \approx 0.101$$

Вероятность получить не более 2 звонков:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9e^{-3}}{2} = e^{-3}(1 + 3 + 4.5) = 8.5e^{-3} \approx 0.423 \end{aligned}$$

Применения распределения Пуассона

1. **Телекоммуникации:** Количество звонков, поступающих на станцию за час
2. **Транспорт:** Количество автомобилей, проезжающих через перекресток за минуту
3. **Медицина:** Количество пациентов, поступающих в больницу за день
4. **Интернет:** Количество посетителей веб-сайта за час
5. **Производство:** Количество дефектов на единицу продукции
6. **Биология:** Количество мутаций в ДНК на определенном участке
7. **Финансы:** Количество крупных колебаний цены акций за торговый день

Пример: анализ веб-трафика

Сайт получает в среднем 120 посетителей в час. Найдем вероятности для 10-минутного интервала.

Пересчет параметра: За 10 минут ожидаем $\lambda = 120 \cdot \frac{10}{60} = 20$ посетителей.

$X \sim Poisson(20)$ - количество посетителей за 10 минут.

- **Вероятность получить ровно 20 посетителей:**

$$P(X = 20) = \frac{20^{20} e^{-20}}{20!} \approx 0.0888$$

Пример: анализ веб-трафика

Сайт получает в среднем 120 посетителей в час. Найдем вероятности для 10-минутного интервала.

Пересчет параметра: За 10 минут ожидаем $\lambda = 120 \cdot \frac{10}{60} = 20$ посетителей.

$X \sim Poisson(20)$ - количество посетителей за 10 минут.

- **Вероятность получить ровно 20 посетителей:**

$$P(X = 20) = \frac{20^{20} e^{-20}}{20!} \approx 0.0888$$

- **Вероятность получить от 15 до 25 посетителей:**

$$P(15 \leq X \leq 25) = \sum_{k=15}^{25} \frac{20^k e^{-20}}{k!} \approx 0.654$$